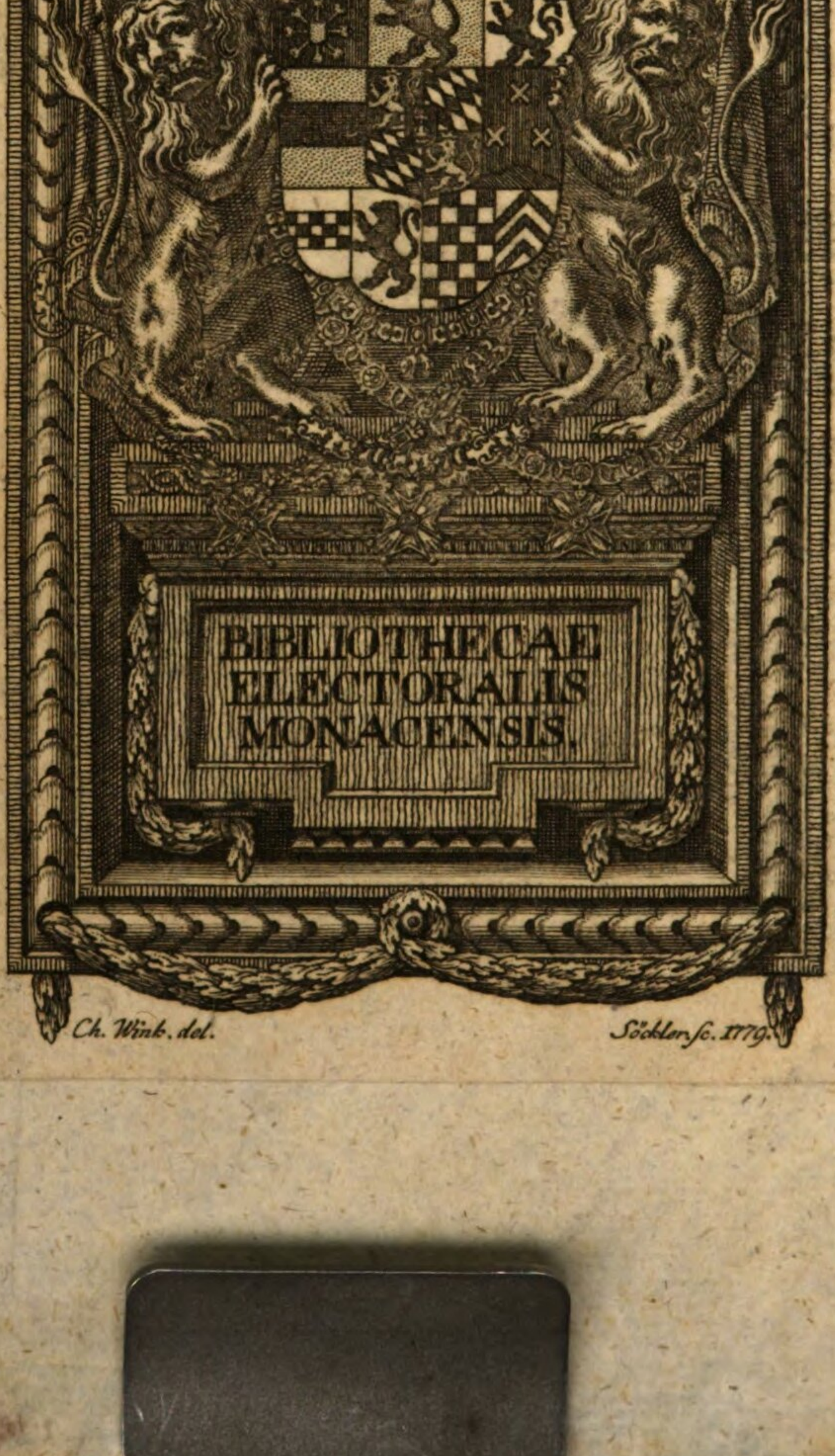
Philos. VI. 70



Ch. Wink. del. Söcklen sc. 1779.

Math. D. 580

Mathesis pura. Arithmetica Systemata & methodi. 215.

Allgemeines

Lehrbuch der Arithmetik

oder

Anleitung

zur

Rechenkunst für Jedermann

von

D. Ernst Tillich

Professor und Mitvorsteher der Erziehungs- und Lehranstalt zu Dessau.

Leipzig 1806.

bey Heinrich Gräff.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Dieses Handbuch, welches anspruchslos in die Reihe verschwisterter Werke tritt, hat sich zum Ziele gesetzt, denkend rechnen, und rechnend denken zu lehren.

Der Verfasser bittet den Lehrer, der es gebrauchen will, sich streng an den Gang zu halten, der hier vorgeschrieben ist; und den erwachsenern Schüler ersucht er vornehmlich, sich an die Uebungen und Aufgaben zu halten.

Daß hier ganz reine und abstracte Zahlenverhältnisse nur erscheinen, und diese oft so, daß man nicht gleich sieht, welcher Nutzen für die gewöhnlich vorkommenden Rechnungen daraus hervorgehen kann, wird an sich den denkenden Lehrer nicht zurückschrecken, da er wohl bald den höhern Zweck der Uebungen einsehen wird. Den andern, der nur die Rechenkunst, weniger die Denkübung, sucht, wird der zweite Band, der die Anwendung auf alle in bürgerlichen Verhältnissen vorkommende Fälle in einer geordneten Reihenfolge enthalten soll, wahrscheinlich zufrieden stellen.

Bis dahin bitte ich auch den etwanigen Einwand der Unvollständigkeit zu verschieben. So wird man die Anleitung zum Ausziehen der Quadrat- und Cubik-Wurzeln nicht finden, weil diese ins Gebiet der mathematischen Rechnungen gehört.

S. 24 ist einer Tabelle gedacht; diese ist deswegen weggeblieben, weil der Herr Verleger sich entschloß, selbst Rechenmaschinen, um möglich billige Preise, mit zu verkaufen.

Die Entwickelung der Geisteskräfte, und die bürgerlichen Verhältnisse allzumal, fordern eine ernste Behandlung der Arithmetik. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die hier gegebene Methode tief einführt in die Combinationen und Proceduren des Verstandes, und zugleich sich über alle Rechnungsarten verbreitet. Die etwanigen Lücken wird die Zeit und der Beistand Anderer allmählich füllen.

Lehrer, von Muth und Kraft beseelt, ergreift den Faden, der Euch gegeben wird! Von dem Hauch aus lebendigen Seelen erwartet der todte Buchstabe Geist und Leben. Durch Euch, und durch dieses

natürliche Kunstmittel, wird auch der Geist in dem Zöglinge sich regen. — Lehrer und Erzieher, ohne Euch ist mein Thun nichts, durch Euch kann es alles werden!

Tillich.

Erklärung der Zeichen:

\+ zu,
× mal,
> mehr als,
< weniger als,
= ist gleich.

Des

Lehrbuchs

der

arithmetischen Verhältnisse

erster Theil.

Oder:

Anleitung

zum

natürlichen oder Kopfrechnen,

nach combinatorischen Grundsätzen.

§. 1.

Wer mit Einsicht und Bewußtseyn fertig rechnen lernen will, der gewöhne sich vor allem an einen methodischen und systematischen Gang; er schreite langsam und mit Besonnenheit von einer Stufe zur andern. Ein jedes Ueberspringen einer Reihe von Uebungen rächt sich durch ein mangelhaftes Auffassen der folgenden. — Die ersten Uebungen des Zählens sind höchst einfach. Sie bestehen blos in der Bezeichnung gleichartiger Gegenstände, in so fern sie im Verhältniß des Mehrs oder Minders, mit Beseitigung aller übrigen Eigenschaften, aufgefaßt werden. Die Gegenstände werden daher auch nicht als Gegenstände, sondern als Größen gezählt *). Da es nun um uns

*) Das Benennen der Gegenstände während der ersten Uebung des Zählens, z. B. eine Bohne, 2 Bohnen, 1 Apfel, 2 Aepfel u. s. f. kann ich daher nicht billigen: weil die Zahl nicht zur Eigenschaft der Gegenstände gehört, sondern ihr vielmehr alles unterworfen ist, was sich der Mensch als Gegenstand denken kann. Besser ist es also, Gegenstände, die durch keine übrigen Eigenschaften zerstreuen, zur Versinnlichung auszuwählen, und diese schlechthin als eins, zwei, drei u. s. f. zu bezeichnen. Dies ist kürzer und verständlicher; indem hier durchaus nichts darauf ankommt, was dies 1, 2, 3 u. s. f. für Gegenstände sind. Außerdem kann man auch nicht einmal einen deutlichen Begriff von **mehrern** Dingen haben, bevor uns das Mehr oder Minder nicht in seiner höchsten Einfachheit selbst deutlich geworden ist. (Vergl. die wissenschaftliche Darstellung der arithmetischen Größenlehre in dem dritten Hefte der **Beiträge zur Erziehungskunst**.)

her kein Ding giebt ohne Größe, und keine Größe ohne ein gewisses Verhältniß des Mehrs oder Minders, so sind alle Gegenstände auch zählbar. Jedoch lassen sich die Dinge nur zählen in so fern sie als gleichartig gedacht werden. Eine Bohne und eine Erbse lassen sich nicht zusammen zählen, in so fern sie als Bohne oder Erbse bezeichnet werden; so bald man sie aber unter einen gemeinschaftlichen Begriff, z. B. den der Feldfrüchte, zusammen bringt, so lassen sie sich als Inbegriff von mehr oder minder, als eins, zwei, drei u. s. f. Dinge dieser Gattung u. s. f. auffassen.

Jedes Zählen ist ein Zusammensetzen und Trennen gewisser Quanta, oder gleichartiger Größen. Daher müssen diese auch zuerst nur höchst einfach in unserer Vorstellung neben einander gesetzt, und von einander getrennt werden; so daß zuerst nur immer eins zugesetzt oder hinweggenommen werde, daß dasselbe dann mit mehrern Zahlen geschehe. Aber es ist nicht nöthig, daß diese Uebung zuerst bis über 10 hinausgedehnt werde; weil dann eine Classe sich schließt, und eine andere mit wenig Veränderung von Neuem beginnt. Diese kleine Zahlenreihe muß aber noch mit allen Zusammenstellungen zur größten Deutlichkeit gebracht und unbedingt fertig eingeübt seyn, ehe man mit Vortheil einen Schritt weiter thun kann.

Uebung.

a) 1, 2. 2, 1. 1, 2, 3. 3, 2, 1. 1, 2, 3, 4. 4, 3, 2, 1. 1, 2, 3, 4, 5. 5, 4, 3, 2, 1. 1, 2, 3, 4, 5, 6. 6, 5, 4, 3, 2, 1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Dies bis 10 fortgesetzt.

b) 2, 4. 4, 2. 2, 4, 6. 6, 4, 2. 2, 4, 6, 8. 8, 6, 4, 2. 2, 4, 6, 8, 10. 10, 8, 6, 4, 2. 1, 3 (hier, wie in dem folgenden, wird ebenfalls auch rückwärts gezählt) 1, 3, 5. 1, 3, 5, 7. 1, 3, 5, 7, 9.

c) 3, 6 :,: 3, 6, 9 :,: 9 + 1 = 10, oder Ein Zig.

1, 4 :,: 1, 4, 7 :,: 1, 4, 7, 10 :,:
2, 5 :,: 2, 5, 8 :,: 2, 5, 8 + 2 = 10 :,:

d) 4, 8 :,: 4, 8 + 2 = 10 :,:
1, 5 :,: 1, 5, 9 :,: 1, 5, 9 + 1 = 10 :,:
2, 6 :,: 2, 6, 10 :,:
3, 7 :,: 3, 7 + 3 = 10 :,:

e) 5, 10 :,: 6 + 4 = 10 :,: 7 + 3 = 10 :,:
8 + 2 = 10 :,: 9 + 1 = 10 :,:

Es wird hier die Verbindung einer jeden Zahl mit der andern berücksichtigt; von eins bis zu der Zahl, mit welcher die einmal genommene Zahl ein Zig ausmacht. So wird z. B. 3 bis 7, 4 bis 6, 5 bis wieder 5 vor- und rückwärts verbunden.

In der Arithmetik muß mehr als in jedem andern Fache verhütet werden, daß kein neuer Schritt geschehe, bevor der vorhergehende nicht bis zur unbedingtesten Deutlichkeit gebracht ist.

Damit dies der Lehrer erfahre, und der Zögling das Erlernte selbstthätig anwenden lerne, so beschließe man ein jedes neuerlerntes Pensum mit einigen den vorigen Uebungen angemessenen Aufgaben. Es ist aber dabei nicht die einzige Rücksicht, daß der Schüler richtig antworte, sondern daß er mit Bestimmtheit wisse, daß und warum das gefundene Resultat richtig sey. Daher muß er eine jede Operation einzeln vollbringen, und überall von seinem ganzen Verfahren Rechenschaft geben. Es geht hierbei anfangs allerdings langsam. Allein, abgerechnet, daß die Schnelligkeit nie die Hauptrücksicht seyn darf, sondern allezeit die Bestimmtheit und Deutlichkeit, mit welcher das Gegebene aufgefaßt und behalten wird, so kann ohne dies doch unter keiner Bedingung weiter geschritten werden, weil sich hier eine jede Uebung so genau an die andere reiht, daß man sich genöthigt sehen würde, zu der erstern Stufe zurückzukehren, wenn man nur einen Theil derselben unbeachtet lassen wollte. Daher lasse man den Zögling allemal eine jede Operation durchgehen, und in ihrem Zusammenhange darstellen, damit ihm die Totalübersicht bleibe.

Aufgabe.

Frage. Zwei und eins, wie viel machen es?
Antw. Zwei und eins machen drei.
Frage. Wie hast du das gefunden?
Antw. Zwei sind zwei Einer, dazu noch einen Einer, werden drei Einer.
Frage. 3 + 2, wie viel sind es?
Antw. Drei und zwei sind fünf. Denn 3 sind drei Einer, und 2 sind zwei Einer. Von den zwei Einern thue ich einen Einer zu den drei Einern, so werden es vier Einer und ein Einer. Thue ich diesen Einer zu den 4 Einern,

so werden es 5 Einer, oder 5. Also ist drei und zwei fünf.

Frage. 3 + 3, wie viel sind es?

Antw. 6. Denn 3 sind drei Einer, und die zweite drei sind auch drei Einer. Von den letztern drei Einern thue ich eine Eins zu den erstern drei Einern, so werden es 4 und 2 Einer. Von der Zwei wieder eine Eins zu 4 Einer, werden 5 + 1, diese Eins zu fünf werden 6. Also 3 + 3 = 6.

3 + 4 u. s. f.

Auf diese Weise fragt man nach einer jeden Verbindung zweier Zahlen von eins bis zehn. Mit der 9 kann hier also nur 1 verbunden werden. Damit dies der Zögling auch im Zusammenhange übersehen lerne, so wähle man noch eine neue Uebung, in welcher zu einer erst genommenen Zahl immer eine andere hinzugesetzt wird.

1)

a) 1 + 1 = 2. 1 + 2 = 3. 1 + 3 = 4 u. s. f.

Dann 2.

b) 2 + 1 = 3. 2 + 2 = 4. 2 + 3 = 5.
2 + 4 = 6.

3)

c) 3 + 3 = 6. 3 + 4 = 7. 3 + 5 = 8 u. s. f.
4 + 3 5 + 3

4)

d) 4 + 4 = 8. 4 + 5 = 9. 4 + 6 = 10 u. s. f.
5 + 4 6 + 4

5)

e) 5 + 5 = 10 u. s. f.

Alle übrige Zusammensetzungen sind schon da gewesen.

Fragen.

Welche Zahl macht 4, wenn sie mit eins verbunden wird?

Antw. 3. Denn eins und 3 ist 4.

Wenn ich 4 habe, wie viel fehlt mir noch um 7 zu erhalten?

Wie viel machen 5 und 4 zusammen?

3 + 2 und 2 + 1, wie viel sind es? u. s. f.

§. 2.

Nachdem auf diese Weise die Zusammensetzungen der Zahlen begriffen sind, so ist es nöthig, daß auch alle mögliche Arten der Entstehung einer jeden Zahl von 2 bis 10 ins Bewußtseyn gebracht werde; dies geschieht, indem man irgend eine Zahl setzt, und nun die kleinern Zahlen alle durchgeht, welche zusammen die angenommene größere Zahl bilden.

a) Zweifach zusammengesetzte Zahlen.

3 ist 2 + 1. 1 + 2 u. s. f.
4 = 3 + 1. 2 + 2 u. s. f.
5 = 4 + 1. 3 + 2 u. s. f.
6 = 5 + 1. 4 + 2. 3 + 3 u. s. f.
7 = 6 + 1. 5 + 2. 4 + 3 u. s. f.
8 = 7 + 1. 6 + 2. 5 + 3. 4 + 4.
9 = 8 + 1. 7 + 2. 6 + 3. 5 + 4.
10 = 9 + 1. 8 + 2. 7 + 3. 6 + 4.
5 + 5.

b) Dreifach zusammengesetzt.

3 = 1 + 1 + 1.
4 = 2 + 1 + 1.
5 = 3 + 1 + 1. 2 + 2 + 1.
6 = 4 + 1 + 1. 3 + 2 + 1. 2 + 2 + 2.
7 = 5 + 1 + 1. 4 + 2 + 1. 3 + 3 + 1.
3 + 2 + 2.
8 = 6 + 1 + 1. 5 + 2 + 1. 4 + 3 + 1.
4 + 2 + 2.
9 = 7 + 1 + 1. 6 + 2 + 1. 5 + 3 + 1.
5 + 2 + 2. 4 + 4 + 1. 4 + 3 + 2.

c) Vierfach zusammengesetzt.

4 = 1 + 1 + 1 + 1.
5 = 2 + 1 + 1 + 1 *).
6 = 3 + 1 + 1 + 1. 2 + 2 + 1 + 1.
7 = 4 + 1 + 1 + 1. 3 + 2 + 1 + 1.
2 + 2 + 2 + 1.
8 = 5 + 1 + 1 + 1. 4 + 2 + 1 + 1.
3 + 2 + 2 + 1. 2 + 2 + 2 + 2.
9 = 6 + 1 + 1 + 1. 5 + 2 + 1 + 1.
4 + 3 + 1 + 1. 4 + 2 + 2 + 1.
3 + 3 + 2 + 1. 3 + 2 + 2 + 2.

*) Hier, so wie in den unmittelbar nachfolgenden Uebungen, muß es dem Schüler auch deutlich gemacht werden, daß die Stelle, auf welcher die Zahl genannt wird, durchaus nichts ändere, daß mithin eben so gut 1 + 1 + 1 + 2 die Summe von 5 geben, als 1 + 2 + 1 + 1, oder 1 + 1 + 2 + 1. Man übersehe hier die vielfältigen Zusammensetzungen und Veränderungen nicht, welche man mit wenigen Zahlen schon vornehmen kann; wie viel mehr wird dies bei mehrern der Fall seyn?

10 = 7 + 1 + 1 + 1. 6 + 2 + 1 + 1.
5 + 3 + 1 + 1. 5 + 2 + 2 + 1.
4 + 4 + 1 + 1. 4 + 3 + 2 + 1.
4 + 2 + 2 + 2. 3 + 3 + 3 + 1.
3 + 3 + 2 + 2.

d) Fünffach zusammengesetzt.

5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.
6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1.
7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1. 2 + 2 + 1 + 1 + 1.
8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1. 3 + 2 + 1 + 1 + 1.
2 + 2 + 2 + 1 + 1.
9 = 5 + 1 + 1 + 1 + 1. 4 + 2 + 1 + 1 + 1.
3 + 3 + 1 + 1 + 1. 2 + 2 + 2 + 2 + 1.
10 = 6 + 1 + 1 + 1 + 1. 5 + 2 + 1 + 1 + 1.
4 + 3 + 1 + 1 + 1. 4 + 2 + 2 + 1 + 1.
3 + 3 + 2 + 1 + 1. 2 + 2 + 2 + 2 + 2.

Aufgaben.

1) Welche Zahlen müssen dreifach verbunden werden, um 3 zu geben?
Antw. Eins. Den 1 + 1 + 1 sind drei Einer, oder drei.
2) Ich habe zwei Zahlen im Sinne, welche zusammen drei ausmachen, welche mögen es seyn?
Antw. 2 + 1. Denn zwei Zahlen sind gegeben; diese sollen drei ausmachen. Drei sind drei Einer; wenn ich zwei Einer zusammen thue, so entstehen nur zwei Zahlen, eine Eins und eine Zwei, diese machen zusammen drei.
3) Ich möchte gern die 4 zusammensetzen, aus vier gegebenen Zahlen, welche sind es?

Antw. Vier Einheiten.
Aber es sind mir drei Zahlen gegeben, welche zusammen vier ausmachen, welche sind es?
Antw. 2 + 1 + 1. Denn drei Zahlen sind da, drei Eins sind nur 3, folglich muß unter ihnen eine Zahl seyn, welche zwei Eins ist, und diese ist 2.

4) Jetzt denke ich an zwei Zahlen, welche ebenfalls 4 ausmachen?
Antw. Diese können seyn 3 + 1 oder 2 + 2. Denn zwei Zahlen sind gegeben, zwei Eins sind nur 2; da fehlen noch 2; diese kann ich zu eins thun, so wird es 3, oder zu jeder Eins noch eine Eins, so wird jede Eins 2. Drei und eins ist 4, und zwei und zwei ist ebenfalls 4.

5) Ich habe 3 Zahlen im Sinne, welche zusammen 6 machen. Welche können es seyn?
Antw. 4 + 1 + 1, oder 3 + 2 + 1, oder 2 + 2 + 2. Warum? Drei Zahlen sollen 6 ausmachen. Drei Eins sind nur 3; da fehlen noch 3; diese kann ich zu einer Eins thun, dann wird diese 4, oder ich kann zwei Einheiten zu einer, und eine Einheit zur andern Eins thun, dann wird es 3 + 2 + 1, oder ich kann jeder Eins noch eine Eins zugesellen *), so wird jede Eins 2.

*) Man lasse diesen Ausdruck immer stehen, denn auch hier gilt das Gesetz, nach welchem uns nichts deutlich ist, was wir nicht mannichfaltig in eine bestimmte Sprache kleiden können. Man schließe übrigens aus dem Umstande, daß in den gewöhnlichen arithmetischen Lehrbüchern diese Uebungen viel später vorkommen, nicht auf eine besondere Schwierigkeit in der Anwendung. Sie schließen sich hier unmittelbar an. Man übersehe ferner nicht die zusammenhängende Kette von Uebungen, welche ihnen vorhergegangen sind, und denke sich nun noch dazu, daß hier die Anschauung immer zu Hülfe kommt, so wird man auf der einen Seite den Zweck und die Nothwendigkeit, auf der andern die Ursache einsehen, aus welcher ihnen gerade dieser Platz eingeräumt ist.

6) Die 6 soll entstehen aus 2 Zahlen, welche können es seyn?

Antw. 5 + 1, oder 4 + 2, oder 3 + 3. Warum? Zwei Eins ist nur 2, zu sechs fehlen noch vier. Die vier Eins kann ich alle zu einer dieser beiden Einheiten thun, dann wird es 5 + 1; oder ich kann 3 Einheiten zu einer, und eine zur andern thun, dann wird es 4 + 2; oder ich kann jeder Einheit 2 Eins geben, dann wird jede 3.

7) Die 7 soll aus drei Zahlen bestehen, welche können es seyn?

Antw. 5 + 1 + 1, 4 + 2 + 1, 3 + 2 + 2. Denn 3 von 7 bleibt noch 4; diese 4 kann entweder einer Eins allein gegeben, oder unter zwei, oder auch unter alle drei getheilt werden.

8) Die 8 besteht aus drei Zahlen, deren erste drei ist; welche werden die übrigen seyn?

Antw. 4 + 1, oder 3 + 2. Denn wenn ich drei habe, so fehlen zu 8 noch 5; diese läßt sich theilen in 4 + 1 oder 3 + 2.

9) 9 soll in vier Theile getheilt werden; der erste ist 2. Wie viel werden die übrigen seyn?

Antw. Ein Theil von 9 ist da, es fehlen also noch drei Theile. Der erste Theil beträgt 2, und es fehlen also zu 9 noch 7. Die 7 muß also in drei Theile getheilt werden. Dies kann sie vierfach, entweder in 5 + 1 + 1, oder 4 + 2 + 1, oder 3 + 3 + 1, oder 3 + 2 + 2.

10) Die Zehn soll aus vier Zahlen bestehen; die erste ist 3, die dritte ist so viel als die erste; wie viel wird nun die zweite und vierte betragen, wenn diese beiden auch einander gleich seyn sollen?

Antw. 2 + 2. Denn die erste ist 3; die dritte soll so viel betragen als die erste, und muß also

auch 3 seyn. 3 + 3 ist 6. Beide haben also sechs. Von 6 bis 10 fehlen noch vier; diese sollen aus zwei gleichen Zahlen bestehen, das sind 2 + 2. Das Ganze wird also seyn 3 + 2 + 3 + 2.

§. 3.

Da alle zusammengesetzte Zahlen als Inbegriff einer bestimmten Summe von Einheiten zu betrachten sind, so müssen sie alle auch in einem gewissen Verhältnisse des Mehrs oder Minders stehen. Eine jede Zahl läßt sich mit der andern vergleichen. Bei dieser Vergleichung kann nun zweierlei Statt finden; entweder sind beide Zahlen sich einander gleich, oder ungleich. Gleich sind sie, wenn beide gleich viel Einheiten in sich fassen; ungleich, wenn eine mehr Einheiten in sich faßt, als die andere. Die Art dieser Verhältnisse des Mehrs oder Minders müssen wir uns sicher und fest einprägen, sonst wird es uns kaum gelingen, Zahlen mit Zahlen zu vergleichen. Schon hat der Zögling diese Operation vollbracht; der gegenwärtigen Uebung liegt es ob, ihn zur Reflexion über das zu bringen, was er eigentlich schon gethan hat. Er soll bestimmt angeben lernen, wie viel eine jede Zahl von eins bis zehn mehr oder weniger ist, als die andere.

Uebung.

Eins ist um eins weniger als 2, und 2 ist eins mehr als 1.

1)

2 = 1 < 3. 3 = 1 > 2.
4 = 1 < 5. 5 = 1 > 4 u. ſ. f. bis 10.

2)

2 = 2 < 4. 4 = 2 > 2.
3 = 2 < 5. 5 = 2 > 3.
4 = 2 < 6. 6 = 2 > 4 u. ſ. f. bis 10.

3)

3 = 3 < 6. 6 = 3 > 3.
4 = 3 < 7. 7 = 3 > 4 u. ſ. f. bis 10.

4)

4 = 4 < 8. 8 = 4 > 4.
5 = 4 < 9. 9 = 4 > 5.
6 = 4 < 10. 10 = 4 > 6.

5)

5 = 5 < 10. 10 = 5 > 5.

Aufgaben.

1) 7, wie viel iſt es mehr als 4?
Antw. 7 iſt 3 mehr als 4. Denn 4 + 3 = 7.

2) 4, wie viel iſt es weniger als 8?

3) Welche Zahl iſt um 3 mehr als 2?
Antw. 5.

4) Welche Zahl iſt 4 weniger als 9?
Antw. 5.

5) 4, und 2 weniger als 6, wie viel macht es?
Antw. 8. Denn 2 weniger als 6 iſt 4. 4 + 4 iſt 8.

6) 3, und 2 mehr als 4, wie viel ſind es?
Antw. 9. Denn 3 iſt 3; 2 mehr als 4 iſt 6. 6 + 3 = 9.

7) 2 weniger als 7, und 3 weniger als 8, wie viel sind es?

Antw. 10. Denn 2 weniger als 7 sind 5; 3 weniger als 8 sind ebenfalls 5. $5 + 5 = 10$.

8) 3 mehr als 2, und 2 mehr als 1, wie viel sind es?

Antw. 8. Denn 3 mehr als 2 sind 5, und 2 mehr als 1 sind 3. $5 + 3 = 8$.

9) 2 weniger als 4, und 3 mehr als 2, wie viel sind es?

Antw. 7. Denn 2 weniger als 4 sind 2, und 3 mehr als 2 sind 5. $2 + 5 = 7$.

10) 4 mehr als 2, und 7 weniger als 10, wie viel sind es?

Antw. 9. Denn 4 mehr als 2 sind 6, und 7 weniger als 10 sind 3. $6 + 3 = 9$.

§. 4.

Unser Zählen geht genau genommen nur von Eins bis Zehen; wo wir eine Classe schließen. Die Zehn ist aber der Inbegriff von 10 Einheiten, womit man wieder eben so verfahren kann, als wenn man mit den Einheiten selbst von vorn zu zählen anfängt. So ist nun 12 nichts anders, als 10 und 2; 13, 10 und 3; so wie es ohnehin schon der Name giebt. Damit aber diese 10, als eine aus mehrern verbundene Einheit, recht versinnlicht werde, so nenne man sie sogleich ein Zig; und lasse nun fortfahren: zwei Zig, drei Zig, vier Zig u. s. f. Alle Einheiten, welche zu Zig noch hinzukommen, werden jetzt mit derselben verbunden ausgesprochen. Es ist

nur eine Ausnahme von der Regel, daß man den Inbegriff von zehn Einheiten, wenn sie allein beachtet werden, zehn nennt. In allen übrigen Fällen und Verbindungen heißt er Zig.

Uebung.

Anmerk. Man zeigt auf ein 10 Zoll langes Holz, indem man spricht:

10 oder ein Zig, 2 Zig, 3 Zig, 4 Zig, 5 Zig, 6 Zig, 7 Zig, 8 Zig, 9 Zig, 10 Zig oder Hundert *).

§. 5.

Eine jede Zahl, die über zehn hinausgeht, ist zusammengesetzt aus Zig (als Inbegriff von 10 Einern) und aus Einheiten selbst. Daher wird auch diese Eintheilung und Zusammensetzung vorzüglich berücksichtigt werden müssen.

1	Zig	und 1	oder 11
1	—	— 2	— 12
1	—	— 3	— 13
1	—	— 4	— 14
1	—	— 5	— 15
1	—	— 6	— 16
1	—	— 7	— 17
1	—	— 8	— 18
1	—	— 9	— 19

*) Man kann hier einige Uebungen aus dem Vorigen wiederholen, damit die Analogie der einfachen und dieser zusammengesetzten Zahlen desto hervorstechender herausgehoben werde.

10 ist wieder ein Zig, folglich sind es nun 2 Zig; 2 Zig und 1 ist 21. 20 + 3 = 23, 20 + 4 = 24, 20 + 5 = 25. Ganz auf dieselbe Weise wird auch mit allen übrigen Zig verfahren.

Aufgaben.

1) 10 + 10 + 10 + 5, wie viel sind es?
Antw. 30 + 5 oder 35.
2) 20 + 20 + 6, wie viel?
Antw. 40 + 6 oder 46. Denn 2 Zig und 2 Zig sind 4 Zig, 40 + 6 sind 46.
3) 30 + 20 + 7, wie viel?
Antw. 50 + 7 oder 57 ꝛc.
4) 43, wie viel Zig und wie viel Einer?
Antw. 4 Zig und 3 Einer.
5) Zu 40 noch 15, wie viel sind es?
Antw. 55.
Frage. Warum?
Antw. 40 ist 4 Zig, 15 ist ein Zig und 5; ein Zig und 5 zu 4 Zig sind 5 Zig, und 5 Einer, das sind 55.
6) Zu 30 noch 24, wie viel?
Antw. 54. Denn 30 = 3 Zig, 24 sind 2 Zig und 4 Einer zu 30 sind 50 + 4 = 54.
7) 40 + 39, wie viel?
Antw. 79.
8) 52 + 23, wie viel giebt es?
Antw. 75.
Frage. Wie hast du das gefunden?
Antw. 52 ist 5 Zig und 2; 23 sind 2 Zig und 3; 5 Zig und 2 Zig sind 70; 3 + 2 sind 5; 70 + 5 = 75.
9) Von 86 nehme ich 16, wie viel bleibt?
Antw. 70. Denn 86 = 80 + 6; 16 = 10 + 6; 10 von 80 bleibt 70; 6 von 6 bleibt 0, folglich 70.

10) Von 79 nehme ich 25, so bleibt 54. Denn 79 = 70 + 9; 25 = 20 + 5; von 70 nehme ich 20, bleibt 50; von 9 nehme ich 5, bleibt 4; 50 + 4 = 54.

§. 6.

Eine aus allen bisherigen Operationen nur zusammengesetzte Uebung ist es, verschiedene Einheiten, deren jede für sich zwar nicht ein Zig ausmacht, beide verbunden aber ein Zig übertreffen, zusammen zu bringen, und nach dieser Ordnung zu behandeln. Hier nimmt man allezeit diejenige Zahl, welche der Zehn am nächsten kommt, und setzt dann die andere daneben; so viel als nun an der größern Zahl noch Einheiten fehlen, so viel nimmt man von der kleinern hinweg, um das Zig erst voll zu machen. Da schon in einer der vorigen Uebungen das Vermehren und Vermindern zur Deutlichkeit gebracht seyn muß, so wird die gegenwärtige nur dies beides schnell und bestimmt verbinden lehren.

9 bis Zig fehlt 1.

9 + 2 = Zig + 1 oder 11.
9 + 3 = — + 2 — 12.
9 + 4 = — + 3 — 13 u. s. f. bis 20.

8 bis Zig fehlt 2.

8 + 3 = Zig + 1 oder 11.
8 + 4 = — + 2 — 12 u. s. f. bis 20.

7 bis

7 bis 10 noch 3.

7 + 4 = 10 + 1 oder 11.
7 + 5 = 10 + 2 oder 12 ꝛc.

6 bis 10 noch 4.

6 + 5 = 10 + 1 oder 11.
6 + 6 = 10 + 2 oder 12.

5 bis 10 noch 5.

5 + 5 = 10.

Kaum darf ich hier wohl noch erinnern, daß auch diese Uebungen vor- und rückwärts geschehen müssen.

Sind mehrere Zig da, so wird die Uebung deshalb sich um nichts ändern; da man dann nur die Zig mit Zig und Einheiten mit Einheiten zu verbinden hat, um die gesuchte ganze Zahl zu finden.

Beispiele.

15 + 15 = Zig Zig + 10, das ist 30.
16 + 15 = 2 Zig + 6 + 5, d. i. Zig und 1, also 31.
17 + 18 = 20 + 8 + 7, d. i. 10 + 5, also 35.
24 + 36 = 50 + 6 + 4 oder 10, d. i. 60.
38 + 47 = 70 + 15, d. i. 85.
47 + 39 = 70 + 16, d. i. 86 ꝛc.

18 von 30, d. i. Zig + 8 von drei Zig bleibt 2 mehr als ein Zig, d. i. 12.
23 von 42, d. i. zwei Zig + 3 von 40 + 20 bleibt 22 weniger 3, d. i. 19.

38 von 94, d. i. 30 + 8 von 90 + 4 bleibt 60 — 8 + 4, d. i. 4 weniger als 60 oder 56 *).

Fragen.

1) 9 + 19, wie viel sind es?
Antw. 9 + 19 = 28.
Frage. Warum?
Antw. 9 ist 9 Einer, 19 ist ein Zig und 9 Einer, 9 + 9 Einer sind ein Zig und 8 Einer, 1 Zig zu 1 Zig werden 2 Zig + 8 Einer, zwei Zig und acht Einer sind 28.

2) 17 + 18, wie viel?
Antw. 35. Denn 17 ist 10 + 7, 18 ist 10 + 8, 10 + 10 = 20, 7 + 8 = 15, 20 + 15 = 35.

3) 34 + 47, wie viel?
Antw. 81. Denn 34 = 30 + 4, 47 = 40 + 7, 30 + 40 = 70, 4 + 7 = 11, 11 + 70 = 81.

4) Von 59 16? wie viel bleibt?
Antw. 43. Denn 59 = 50 + 9, 16 = 10 + 6, 10 — 59 bleiben 49; von diesen noch 6 Einer bleiben 43.

5) 29 < 87?
Antw. 58. Denn 87 = 80 + 7, 29 = 20 + 9, 20 von 80 bleibt 60, 9 = 2 > 7, folglich ist die Zahl 2 < als 60, 2 < 60 = 58.

6) 37 < 89 + 42?
Antw. 94. Denn 89 = 80 + 9, 37 = 30 + 7, 30 von 80 bleibt 50, 7 = 9 < 2; 42 = 40 + 2, 40 + 50 = 90, 2 + 2 = 4, 90 + 4 = 94.

§. 7.

Wenn zwei oder mehrere gleich große Zahlen vorhanden sind, so werden diese eben-

*) Es sind hier die meisten Stufen übersprungen, weil sie ein jeder leicht finden kann. Der Lehrer aber darf eher keine Stufe weglassen, bis der Schüler die Regel seines Verfahrens sich abstrahirt hat.

falls, so wie die Zig, als Einheiten behandelt. Der Grund liegt darin, weil sie zu einander in eben demselben Verhältnisse stehen, als eine Einheit zur andern. Daher faßt man solche gleich große oder gleichförmig vertheilte Zahlen auch als Einheiten zusammen, und zählt ihr Vorhandenseyn als einmal, zweimal u. s. f.; so ist 3 + 3 + 3 nichts, als das dreimalige Vorhandenseyn der Drei, und man nennt es kurz drei mal drei; 5 + 5 + 5 drei mal 5 u. s. f. Da aber bei dieser Operation auch die Totalsumme gesucht werden muß, welche aus der Vereinigung aller so gleichförmig vertheilten Zahlen entsteht; diese aber auf dem eben bezeichneten Wege, oder überhaupt nach der Regel des Vermehrens und Verminderns, gefunden werden kann, so wird es deshalb nöthig seyn, vor allem darauf zu sehen, daß die Totalsumme schnell gefunden werde. Um dahin zu gelangen, zählt man, wie in dem ersten Anfange, nur den Inhalt aller so verbundenen Zahlen und läßt das Mal Sache der Anschauung seyn. Erst wenn die ganze Summe gefunden ist, macht man darauf aufmerksam, wie viel mal eine Zahl wiederholt werden mußte, um dieselbe zu finden *).

*) Hier leisten die oben beschriebenen Hölzer die vortreflichsten Dienste. Man setzt nämlich dekadisch die Hölzer zusammen, und zählt nur fort. Z. B. zwei Hölzer, jedes zu vier Zoll, bringt man zusammen über einander, und läßt zählen 4, 8. Weil nun zu zehn nur noch zwei fehlen, so wird das dritte Holz in zwei Theile getheilt werden müssen; daher werden hier sogleich zwei Hölzer von zwei Zollen genommen, und so

2, 4.
3, 6, 9.
4, 8, 12, 16.
5, 10, 15, 20, 25.
6, 12, 18, 24, 30, 36.
7, 14, 21, 28, 35, 42, 49.
8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64.
9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81.

1×2, 2×2=4, 4=2×2.
1×3, 2×3=6, 3×3=9.
1×4, 2×4=8, 3×4=12, 4×4=16.
1×5, 2×5=10, 3×5=15, 4×5=20,
5×5=25.
1×6, 2×6=12, 3×6=18, 4×6=24,
5×6=30, 6×6=36.
1×7, 2×7=14, 3×7=21, 4×7=28,
5×7=35, 6×7=42, 7×7=49.

vertheilt, daß eins zu 8 kommt, mit dem es dann zehn macht, und das andere Stück daneben gesetzt wird, so sieht und erkennt dann der Zögling Zig und zwei oder zwölf, und die dreifache Wiederholung der 4, aus der sich die zwölf bildete. Kommt dann noch ein mal 4 dazu, so wird sie mit der Zwei, welche schon über Zig da war, 6 ausmachen, so daß Zig und 6, oder 16, die Totalsumme ist. Eben so wird auch bei andern Zahlen verfahren. So wird 8 z. B. zwei mal genommen, 8 und 2 zusammen als Zig, und die 6 als Rest der zweiten 8 neben das Zig gestellt, 10 + 6 oder 16 geben. Zu den folgenden Zusammensetzungen mit ihr wird man brauchen: a) 4 + 4, b) 6 + 2, c) 8, 8, d) 2 + 6, e) 4 + 4. Da der Schüler schon aus den vorhergehenden Uebungen unterrichtet ist, wie viel allezeit noch zu einem jeden Zig und zu einer jeden kleinern Zahl Einheiten fehlen, um das Ganze auszumachen, so werden sich hier keine Schwierigkeiten finden.

1 × 8, 2 × 8 = 16, 3 × 8 = 24, 4 × 8 = 32,
5 × 8 = 40, 6 × 8 = 48, 7 × 8 = 56,
8 × 8 = 64.
1 × 9, 2 × 9 = 18, 3 × 9 = 27, 4 × 9 = 36,
5 × 9 = 45, 6 × 9 = 54, 7 × 9 = 63,
8 × 9 = 72, 9 × 9 = 81.

Bei dieser Uebung darf man nicht vergessen, daß allemal gleich rückwärts auch gezeigt und gefragt werden muß, wie viel mal die größere Summe die Wiederholung einer kleinern sey.

Wenn also der Schüler begriffen hat, daß $2 \times 2 = 4$ sey, so muß gleich der Lehrer ihm auch umgekehrt zeigen: $4 = 2 \times 2$; hat er gesprochen $4 \times 5 = 20$, so zeigt ihm der Lehrer $20 = 4 \times 5$, und so geht es durch alle Uebungen hindurch.

Aufgaben.

a) 3 × 4, wie viel ist es?
Antw. 12.
b) 2 × 5 und 3 × 3, wie viel?
Antw. 19. Denn 2 × 5 = 10, 3 × 3 = 9,
10 + 9 = 19.
c) 32, wie viel mal 8?
Antw. 4 × 8. Denn wenn ich die 8 vier mal wiederhole, so wird es 32.
d) 35 und 4 × 7, wie viel?
Antw. 63.
Frage. Warum?
Antw. Zu 35 soll noch 4 × 7 hinzukommen,
4 × 7 = 28, 30 + 20 = 50, 5 + 8 = 13,
50 + 13 = 63.
e) 4 × 7 + 6 × 9, wie viel?
Antw. 82. Denn 4 × 7 = 28, 6 × 9 = 54,
20 + 50 = 70, 8 + 4 = 12, 70 + 12 = 82.

f) $3 \times 7 + 6 \times 10$ *), wie viel mal 9?

Antw. 9×9. Denn $7 \times 7 = 21$; $6 \times 10 = 60$; $21 + 60 \times 81$; $81 = 9 \times 9$.

g) $7 \times 7 + 3 \times 5$, wie viel mal 8?

Antw. 8×8. Denn $7 \times 7 = 49$; $3 \times 5 = 15$; $40 + 10 = 50$; $5 + 9 = 14$; $50 + 14 = 64$; $64 = 8 \times 8$.

h) 8×9, wie viel ist es weniger als 81?

Antw. 9. Denn $8 \times 9 = 72$; 72 ist $9 < 81$.

i) 6×8, wie viel ist es weniger als 7×9?

Antw. 15. Denn $6 \times 8 = 48$; $7 \times 9 = 63$; 48 ist $15 < 63$. Oder auch so: 1×8 ist eins weniger als 1×9; 6×8 muß also 6 weniger seyn als 6×9; 6×9 ist 9 weniger als 7×9; 6×8 sind also $6 + 9$ weniger als 7×9; $6 + 9 = 15$.

k) 6×9, wie viel ist es mehr als 7×7?

Antw. 5. Denn 6×9 ist 54; 7×7 ist 49; 54 ist 5 mehr als 49. Oder auch: 1×9 ist 2 mehr als 1×7; 6×9 muß folglich 6×2 mehr seyn als 6×7; $6 \times 2 = 12$. Nun ist 7×7 ein mal 7 mehr als 6×7; es bleiben folglich 7 weniger als 12, das sind 5 **).

*) Daß $6 \times 10 = 60$ und $7 \times 10 = 70$ u. s. f. sey, ist bei dieser Methode nicht nöthig zu lehren, denn zehn und Zig hat der Schüler schon als gleichbedeutend gebraucht; es versteht sich also, daß 60 und 6×10 eben so gut gleichbedeutend seyn müsse, als 6×1 und 1×6.

**) Für jede Stufe wird der Lehrer selbst hier, so wie überall, Fragen finden. Es konnte nicht mehr als ein Beispiel für jede Stufe gegeben werden. Die Hauptsache bleibt das Lernen, und das immer tiefere Abstrahiren der Zahl.

§. 8.

Da die Auflösung der zusammengesetzten Zahlen in Einheiten nun vollzogen ist; so muß unsere Sorge dahin gehen, zu zeigen, daß es ganz gleich sey, ob eine kleinere Zahl mit einer größern, oder ob dieselbe größere Zahl mit einer kleinern vermehrt erscheine; daß also 2×3 eben so viel seyn müsse als 3×2, und 4×5 nichts anders sey als 5×4. Denn so wie 1×4 ist 4×1, so muß auch 2×4 seyn 4×2, und $3 \times 4 = 4 \times 3$ u. s. f. Die kleinere Zahl wird natürlich denn um eben so viel mehr wiederholt, als die andere Zahl, mit der sie wiederholt wird, größer ist. Ist daher der Multiplicator *) größer, so wird der Multiplicandus um eben so viel mehr; ist der letztere größer, so wird er gerade um so viel weniger wiederholt. Ist z. B. 5×6 da, so wird hier dasselbe Verhältniß bleiben, als wenn es 6×5 hieße; denn die 6 kann durch die 5 nur 5 mal wiederholt werden, hingegen wird die letztere durch 6 auch 6 mal wiederholt; folglich wiederholt die 6 die 5 um ein mal mehr. Nun ist gerade 5×6 5 mehr

*) Deutsch: Vermehrer; so nennt man allezeit diejenige Zahl, welche eine andere vermehrt; da hingegen diejenige, welche vermehrt wird, Multiplicandus heißt. So ist z. B. in 3×5 die 3 der Multiplicator und 5 der Multiplicandus, weil 3 die 5 vermehrt, und die 5 vermehrt wird: hingegen in 5×3 ist 5 der Multiplicator und 3 der Multiplicandus, weil hier die 5 die Zahl ist, welche vermehrt, und die 3 diejenige, welche vermehrt wird.

als 5×5; daher müssen die Summen sich auch völlig gleich bleiben.

[Veranschaulicht ist dies auf der hinten zur Versinnlichung der arithmetischen Verhältnisse beigedruckten Tabelle. Man darf da nur ein Rechteck heraus heben, dessen Breite 5, und dessen Länge 6 Theile hat; dies sind 5×6 in einer und ebenderselben Figur. Dasselbe gilt von allen arithmetischen Verhältnissen. Zum ersten Anfange ist es aber noch besser, man zählt von den schon beschriebenen Hölzern 5×5 hin, und setzt dann zu jeder 5 noch einen Würfel, so wird es 5×6 seyn. Jetzt darf man nur von jedem 6 eins wegnehmen. Da es 5×6 sind, so wird man im Ganzen 5 Einer wegnehmen, oder 1×5. Jede 6 ist dadurch aber auch nur 5 geworden; folglich ist es nun 6×5, ohne daß übrigens die ganze Summe sich weder vermehrt noch vermindert. Auf dieselbe Weise hat man auch bei andern Zahlen zu verfahren. Es kommt viel darauf an, daß man sich dies sicher und fest eindrückt, weil die folgenden arithmetischen Operationen darauf gebauet werden.]

Die Uebungen sind folgende:

$2 \times 3 = 3 \times 2$
$2 \times 4 = 4 \times 2$
$2 \times 5 = 5 \times 2$ u. s. f.

$3 \times 4 = 4 \times 3$
$3 \times 5 = 5 \times 3$
$3 \times 6 = 6 \times 3$ u. s. f.

$4 \times 5 = 5 \times 4$
$4 \times 6 = 6 \times 4$ u. s. f.

$5 \times 6 = 6 \times 5$
$5 \times 7 = 7 \times 5$ u. s. f.

$6 \times 7 = 7 \times 6$ u. s. f.
$7 \times 8 = 8 \times 7$ u. s. f.
$8 \times 9 = 9 \times 8$ u. s. f.

[Diese Uebungen müssen, so wie die vorhergehenden, mit allen Zahlen durchgemacht werden.]

Aufgaben.

a) 7×8, wie viel mal 7?
Antw. 8×7.

b) 9×5, wie viel ist es mehr als 4×9?
Antw. 9. Denn $9 \times 5 = 5 \times 9$; 5×9 ist 1×9 mehr als 4×9.

c) 4×8, wie viel ist es weniger als 7×4?
Antw. 4. Denn $4 \times 8 = 8 \times 4$; 7×4 ist 1×4 weniger als 8×4.

d) $7 \times 5 + 2 \times 7$, wie viel mal 7?
Antw. 7×7. Denn $7 \times 5 = 5 \times 7$; 2×7 zu $5 \times 7 = 7 \times 7$.

e) 8×6 weniger 4×8, wie viel mal 8 bleiben?
Antw. 2×8. Denn $8 \times 6 = 6 \times 8$; 4×8 von 6×8 bleiben 2×8.

f) 5×8 von 8×7, wie viel mal 8 bleiben?
Antw. 2×8. Denn $8 \times 7 = 7 \times 8$; 5×8 von 7×8 bleiben 2×8.

g) $4 \times 5 + 5 \times 5$, wie viel mal 9?
Antw. 5×9. Denn $4 \times 5 + 5 \times 5 = 9 \times 5$; $9 \times 5 = 5 \times 9$.

h) $3 \times 3 + 3 \times 5$, wie viel mal ist es 8?
Antw. 3×8. Denn $3 \times 5 = 5 \times 3$; 5×3 zu $3 \times 3 = 8 \times 3$; 8×3 ist gleich 3×8.

(Will man die Probe machen lassen, so kann das hier, wie in den vorigen Beispielen, auf folgende Weise geschehen: $3 \times 3 = 9$; $3 \times 5 = 15$; $9 + 15 = 24$; $24 = 3 \times 8$, oder 8×3 ist ebenfalls 24; folglich ist $3 \times 3 + 3 \times 5$ gleich 3×8.

i) 4 × 3 weniger als 4 × 9, wie viel mal 6 bleiben?

Antw. 4 × 6. Denn 4 × 3 = 3 × 4; 4 × 9 = 9 × 4; 3 × 4 von 9 × 4 bleiben 6 × 4; 6 × 4 ist gleich 4 × 6.

(Probe: 4 × 3 ist 12; 4 × 9 = 36; 12 von 36 bleibt 24; 24 ist 4 × 6, oder 4 × 6 ist 24).

[Man muß hier überall die Fragen so stellen, daß sie in Ganze sich auflösen, weil die gebrochenen Zahlen nicht vorkommen dürfen. Es kann also nicht gefragt werden: 7 × 9, wie viel mal 8, oder auf eine ähnliche Weise. Wohl aber: 7 × 9 und 9 × 2, wie viel mal 9; oder auch: 7 × 9 und 2 × 7, wie viel mal 7; denn dann dürfen nur die Multiplicatoren versetzt und zusammengezählt werden, so ergiebt sich allezeit von selbst das Resultat. Wenn zu 7 × 9 noch 9 × 7 kommen sollen, so sieht man wohl, daß hier 9 × 2 sogleich umgetauscht werden kann mit 2 × 9, und daß dann diese 2 × 9 mit 7 × 9 gleich sind 9 × 9. Dasselbe gilt auch 7 × 9 und 2 × 7; denn hier darf man nur den Multiplicandus 9 zum Multiplicator machen, so wird es 9 × 7; zu diesem noch 2 × 7 wird 11 × 7. Man sieht, daß man eben so gut auch fragen könne: 7 × 9 und 7 × 2, wie viel mal 11? Ohnerachtet der Zögling noch nicht bis über 10 geübt ist die Multiplicatian fortzusetzen, so wird er dies dennoch hier finden können, und wenn er dies kann, so darf man dann sicher rechnen, daß er das Vorhergehende ganz gefaßt hat.]

§. 9.

So wie schon in dem Vorigen, nach der Uebung mit einfachen Zahlen, auch die Zehner oder Zig auf ebendieselbe Weise behandelt wurden, eben so wird dies auch bei dieser Uebung der Fall seyn. Denn die Zig sind zusammengesetzte Einheiten; während dem man sie vermehrt oder vermindert kömmt es nicht darauf

an, aus wie vielen Einheiten sie bestehen. So wie $3 \times 3 = 9$ ist, so muß drei mal drei Zig auch neun Zig seyn *).

Wenn aber der Multiplicator ebenfalls Zig ist, so wird dann natürlicher Weise auch die Vermehrung um einen Grad mehr steigen. Anstatt daß also $3 \times 30 = 90$ ist, wird 30×30 werden 90 Zig oder 900; 30×40 12 Zig Zig oder 1200. Dasselbe muß natürlich auch von allen übrigen Zahlen gelten. Sind aber Zig und Einer zugleich zu multipliciren, so werden die Zig und Einer besonders genommen, und dann erst zusammen verbunden werden müssen. So ist nun 7×24 7×2 Zig, das sind 14 Zig, und 7×4, das sind 28, also 2 Zig und 8 zu 14 Zig sind 16 Zig und 8 Einer, oder 168. Denn die Zig können nicht anders behandelt werden als Einer, und eine Summe von Einern muß nothwendig wieder in Zig umgesetzt werden. Zig zu Zig verbinden sich dann zu einer bestimmten Summe. Bleiben noch Einer übrig, so werden diese mit den Zig zusammen als Einer ausgesprochen. Ein Auswendiglernen des so genannten großen Ein mal Eins wird deshalb nicht nöthig seyn, weil es im Grunde mit dem Vorigen schon gelernt und begriffen ist. Einsehen und begreifen läßt es sich aber nur durch die oben beschriebenen Operationen.

*) Die Regel, welche die gewöhnlichen Rechenbücher geben, daß hier an den Quotienten allezeit eine Null angehängt werden müsse, ist mechanisch und macht die Sache nicht deutlich.

Die Uebungen sind hier ganz wie in dem Vorigen:

2 × 20 = 40.	20 × 20 = 400.
2 × 30 = 60.	20 × 30 = 600.
3 × 30 = 90.	30 × 30 = 900.
2 × 40 = 80.	20 × 40 = 800.
3 × 40 = 120.	30 × 40 = 1200. *)
4 × 40 = 160.	40 × 40 = 1600.
2 × 50 = 100.	20 × 50 = 1000.
3 × 50 = 150.	30 × 50 = 1500.
4 × 50 = 200.	40 × 50 = 2000.
5 × 50 = 250.	50 × 50 = 2500.

[Es wäre unnöthig, diese Uebungen hier ganz auszuschreiben, da ein jeder sieht, daß sie durch nichts von den vorhergehenden unterschieden sind, als durch die Anwendung dessen, was vorher für die Einer galt, auf die Zig. Es versteht sich von selbst, daß im Uebrigen auch hier alle Uebungen wiederholt werden müssen, die dort vorkommen. Die Fragen, welche einer Seits zur Prüfung dienen, ob die Uebung von dem Zöglinge auch ganz verstanden worden sey, anderer Seits aber auch dem Schüler mehr Sicherheit und Gewandheit geben, sind daher ebenfalls nicht anders einzurichten, als vorher. Auch wird es selbst hier nicht einmal nöthig seyn, jedes Einzelne so durchaus ausführlich zu behandeln; indem die Analogie den Zögling leicht selbst zur richtigen Behandlung dieser zusammengesetztern Zahlen führen wird. Des Lehrers Aufmerksamkeit wird daher vorzüglich darauf hingerichtet seyn müssen, daß diese Analogie vollständig und allseitig aufgefaßt und richtig angewendet werde. Nachdem dieses geschehen ist, so faßt man sogleich Einer und Zig zusammen, damit darin auch einige Fertigkeit erzeugt werde.

*) NB. Man spreche hier 12 Zig, und im zweiten Falle 12 Hundert. Zig hundert heißt aber Tausend; 1200 ist also ein Tausend zwei Hundert. Es ist nicht nöthig, diese Begriffe früher zu geben, als es des Zöglings Bedürfniß erheischt; dann hat es auch gewiß keine Schwierigkeiten.

Uebung.

2 × 11 = 2 Zig + 2 oder 22.
3 × 11 = 3 Zig + 3 oder 33.
4 × 11 = 4 Zig + 4 oder 44.
2 × 20 = 40.

Man wird auch hier selbst die Uebungen finden, so bald man nur die Regel praktisch begriffen hat, die diesem ganzen Verfahren zum Grunde liegt.]

Zahlencombination.

Vorbereitung.

[Wenn man zwei oder mehrere Zahlen zusammenstellt, so fließen diese in unserer Vorstellung zur Einheit zusammen, indem wir die vor uns liegende Zahl als eine aus mehreren Theilen zusammengesetzte Größe betrachten. Die Zahl Zwei erlaubt uns z. B. schon eine doppelte Ansicht. Wir können sie nehmlich ansehen, als zwei neben einander stehende Einheiten, oder als eine aus zwei Einern zusammengesetzte und zur Einheit verbundene Zahl. Dies drücken wir durch die Worte Ein mal Zwei, Ein mal Drei u. s. f. aus. Dasselbe gilt auch von größern Zahlen. In dieser Beziehung gedacht, ist die Eins nicht mehr eine für sich selbst bestehende Zahl; sondern sie besteht als Theil einer zur Einheit verbundenen größern.

Da nun eine Eins so groß ist, als die andere, so müssen natürlich auch die Theile des Ganzen, in so fern sie aus Einern bestehen, gleich seyn. Ein aus mehrern gleich großen Theilen Zusammengesetztes nennt man ein Ganzes *). Das Ganze ist also an sich nichts weiter, als der Inbegriff seiner Theile, durch welche es bedingt ist. Es bildet sich nicht willkührlich seine Theile, sondern es muß allezeit als von diesen gebildet angesehen werden.]

*) In dem dritten Hefte der Beiträge zur Erziehungskunst habe ich zu zeigen gesucht, daß das Ganze durchaus ein arithmetischer, und keinesweges ein blos empirischer Begriff sey.

§. 10.

So wie sich die Zahlen von Eins an zu unendlichen Summen zusammensetzen lassen, so kann man sie nicht minder auch eben so weit theilen. In so fern eine Zahl als getheilt, oder wenigstens als theilbar, gedacht wird, in so fern heißt sie ein Ganzes, das allezeit als Inbegriff seiner Theile zu denken ist. So wie es kein Ganzes geben kann ohne Theile, so kann hinwiederum nur der Theil in so fern da seyn, als er in Beziehung auf sein Ganzes gedacht wird. Die Summe der Theile eines Ganzen ist durchaus unbestimmt. Jeder Theil hat aber seinen Namen von der Summe, welche zu einem Ganzen erfordert wird. Sind z. B. drei Theile da, so ist ein jeder dieser Theile ein Drittel; und ein Viertel, wenn deren vier vorhanden sind. Vier Viertel, 5 Fünftel, und 3 Drittel, sind mithin völlig gleich. Je mehr die Summe der Theile wächst, desto weniger enthält ein jeder einzelne Theil von der Größe seines Ganzen; und umgekehrt: je geringer die Anzahl von Theilen ist, welche zu einem Ganzen erfordert werden, desto mehr beträgt der Größeninhalt eines jeden einzelnen Theiles.

Die Uebung muß zuerst dahin gehen, eine jede einzelne Zahl als Theil der andern, und umgekehrt: auch eine jede Zahl als ein Ganzes, oder einen Inbegriff von Theilen, auffassen zu lehren.

Uebung.

2 ist zusammengesetzt aus 2×1; 1 ist der zweite Theil, oder ein Halb, von 2.

3 ist drei mal 1; 1 ist der dritte Theil von 3; 2 sind $\frac{2}{3}$ von 3; 3 sind drei Drittel, oder ein Ganzes.

$4 = 4 \times 1$; $1 \times 1 = \frac{1}{4}$ von 4×1. $2 \times 1 = \frac{2}{4}$ von 4×1. $3 \times 1 = \frac{3}{4}$ von 4×1. $4 \times 1 = \frac{4}{4}$ von 4×1, oder ein mal Vier, das ist: einem Ganzen.

$1 = \frac{1}{5}$ von 5×1 oder 1×5, oder einen Ganzen ꝛc.

$1 = \frac{1}{6}$ von 6×1 oder 1×6 ꝛc.

$1 = \frac{1}{7}$ von 7×1 oder 1×7 ꝛc.

$1 = \frac{1}{8}$ von 8. $1 = \frac{1}{11}$ von 11.

$1 = \frac{1}{9}$ von 9. $1 = \frac{1}{12}$ von 12.

$1 = \frac{1}{10}$ von 10. $1 = \frac{1}{13}$ von 13. *)

§. 11.

Das Ganze wird allemal als Einheit aufgefaßt, das heißt: so, daß man sich einen Gegenstand allein und gesondert, oder als ein Mal vorhanden, denkt. Indem wir nun irgend eine Zahl als ein Mal, oder zwei Mal u. s. f. nennen, so denken wir uns ein, oder zwei, oder mehrere Reihen von Zahlen, die

*) So bald nur die ersten Uebungen sorgfältig gemacht worden sind, so wird hier der Schüler nach der Analogie schon weiter schließen, und selbst wissen, daß z. B. 1 von 20 sey $\frac{1}{20}$, von 24 $\frac{1}{24}$ u. s. f. Ist ihm dies ganz klar, so kann man weiter gehen.

als Ganze bestehen. So ist ein Mal 5 ein Ganzes, das aus 5 Einheiten, oder 5 Theilen, besteht, und von diesen ist jede Einheit der fünfte Theil. Zwei Mal fünf ist zwei Mal der Inbegriff von fünf Einheiten, oder zwei Ganze, deren jedes aus fünf Theilen besteht. Dasselbe gilt auch von einer jeden andern Zahl. Wenn nun eine bestimmte Summe von Einheiten genommen wird, welche durch den Ausdruck Mal als Ganzes aufgefaßt ist, so wird eine jede Einheit auch als Theil derselben angesehen und benannt werden müssen. So ist z. B. sechs ein Mal fünf und ein fünftel Mal fünf *); $7 = 1 \times 6 + \frac{1}{6} \times 6$ u. s. f.

Uebung.

$3 = 3 \times 1$, und $1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2$.

$4 = 4 \times 1$, und 2×2, und $1 \times 3 + \frac{1}{3} \times 3$.

$5 = 5 \times 1$, $2 \times 2 + \frac{1}{2}$, $1 \times 3 + \frac{2}{3}$, $1 \times 4 + \frac{1}{4}$.

$6 = 6 \times 1$, 3×2, 2×3, $1 \times 4 + \frac{2}{4}$, $1 \times 5 + \frac{1}{5}$.

$7 = 7 \times 1$, $3 \times 2 + \frac{1}{2}$, $2 \times 3 + \frac{1}{3}$, $1 \times 4 + \frac{3}{4}$, $1 \times 5 + \frac{2}{5}$, $1 \times 6 + \frac{1}{6}$.

*) Diesen Ausdruck rechtfertige ich so: Mal bedeutet ursprünglich die Vereinigung oder Verbindung zu Einem. (Siehe Adlung's Wörterbuch.) Mal fünf ist folglich der kurze und richtige Ausdruck für ein aus 5 Theilen bestehendes Ganze, oder für fünf Einer, in so fern sie als zu Einem Ganzen verbunden erscheinen. Es ist also völlig mit Recht, daß z. B. 6 ein Mal 5 und $\frac{1}{5}$ dieses Mal fünf genannt wird.

$8 = 8 \times 1,\ 4 \times 2,\ 2 \times 3 + \frac{2}{3},\ 2 \times 4,$
$1 \times 5 + \frac{3}{5},\ 1 \times 6 + \frac{2}{6},\ 1 \times 7 + \frac{1}{7}.$
$9 = 9 \times 1,\ 4 \times 2 + \frac{1}{2},\ 3 \times 3,\ 2 \times 4 + \frac{1}{4},$
$1 \times 5 + \frac{4}{5},\ 1 \times 6 + \frac{3}{6},\ 1 \times 7 + \frac{2}{7},$
$1 \times 8 + \frac{1}{8}.$
$10 = 10 \times 1,\ 5 \times 2,\ 3 \times 3 + \frac{1}{3},\ 2 \times 4 + \frac{2}{4},$
$2 \times 5,\ 1 \times 6 + \frac{4}{6},\ 1 \times 7 + \frac{3}{7},\ 1 \times 8 + \frac{2}{8},$
$1 \times 9 + \frac{1}{9}.$

Aufgaben.

7, wie viel mal 3?
Antw. 7 ist $2 \times 3 + \frac{1}{3} \times 3$. Denn 6 ist 2×3; 7 ist 1 mehr als 6; 1 ist aber der dritte Theil von 3; folglich ist 7 ein Drittel mehr als 2×3, oder $2 \times 3 + \frac{1}{3} \times 3$.

9, wie viel mal 2?
Antw. $9 = 4 \times 2 + \frac{1}{2}$. Denn $8 = 4 \times 2$; $9 = 1$ mehr als 8; 1 ist von $2\frac{1}{2}$; folglich ist 9 ein Halb mehr als 4×2, oder $4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2$.

$2 \times 4 + \frac{1}{4}$, wie vie viel mal 1?
Antw. 9×1. Denn 2×4 ist 8×1; $\frac{1}{4}$ von 4×1 ist 1×1; ein mal eins zu 8 mal 1 werden 9×1; folglich sind $2 \times 4 + \frac{1}{4} \times 4 = 9 \times 1$.

$3 \times 2 + \frac{1}{2}$, wie viel mal Eins?
Antw. 7×1. Denn $3 \times 2 = 6 \times 1$; $\frac{1}{2} \times 2 = 1 \times 1$; 1×1 zu $6 \times 1 = 7 \times 1$.

$1 \times 5 + \frac{3}{7}$ von 1×7, wie viel mal 1?
Antw. 8×1. Denn $1 \times 5 = 5 \times 1$; $\frac{3}{7}$ von 7×1 ist 3×1; 3×1 zu 5×1 sind 8×1.

$\frac{3}{4}$ von $4 + \frac{3}{8}$ von $8 + \frac{4}{9}$ von 9, wie viel mal Eins?
Antw. 10×1. Denn $\frac{3}{4}$ von $4 = 3 \times 1$; $\frac{3}{8}$ von 8 ist ebenfalls 3×1; $\frac{4}{9}$ von $9 = 4 \times 1$; $3 \times 1 + 3 \times 1 + 4 \times 1 = 10 \times 1$.

$\frac{6}{7}$ von 7, wie viel sind es Theile von 10? — 8
Antw. $\frac{6}{10}$. Denn $\frac{6}{7}$ von $7 = 6 \times 1$; 6×1 ist 6 Mal der zehnte Theil von 10×1.

$\frac{8}{9}$ von 9, wie viel mal 4?
Antw. 2×4. Denn $\frac{8}{9}$ von 9 ist 8×1; 8×1 ist zwei mal vier mal Eins, oder zwei mal 4.

$\frac{5}{8}$ von 8, wie viel sind es Theile von 6?
Antw. $\frac{5}{6}$. Denn $\frac{5}{8} \times 8$ sind 5×1; 5 mal Eins ist fünf mal der sechste Theil von 6×1.

§. 12.

Durch die vorher §. 8 und 9 angestellten Uebungen wurden mehrfach zusammengesetzte Zahlen durch andere zu einer ganzen Summe erhöht. Darauf stützt sich die folgende Uebung, in welcher eine jede, auch über Zehn hinausgehende, Zahl als Inbegriff mehrerer Ganzen angesehen wird.

Uebungen.

$12 = 2 \times 6$ und 6×2. Der zweite Theil, oder ein Halb, von 2×6 ist 1×6; der sechste Theil von 6×2 ist 1×2. 12 ist 3×4 und 4×3. Der dritte Theil von 3×4 ist 1×4; $\frac{1}{4}$ von 4×3 ist 1×3. 12 ist 1×7 und $\frac{5}{7} \times 7$; $1 \times 8 + \frac{4}{8}$ u. s. f.

14 ist 2×7 und 7×2; ein Halb von 2×7 ist 1×7; der siebente Theil von 7×2 ist 1×2.

15 ist 3×5 und 5×3. Der dritte Theil von 3×5 ist 1×5; der fünfte Theil von

5×3 ist 1×3. 15 ist $2 \times 7 + \frac{1}{7} \times 7$; $7 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2$; $1 \times 8 + \frac{7}{8} \times 8$ u. s. f.

16 ist 2×8 und 8×2; 4×4. Ein Halb von 2×8 ist 1×8; der achte Theil von 8×2 ist 1×2. Der vierte Theil von 4×4 ist 1×4. 16 ist 2×7 und $\frac{2}{7} \times 7$ u. s. f.

18 ist 2×9 und 9×2; 3×6 und 6×3.

20 ist 2×10 und 10×2; 4×5 und 5×4.

24 ist 2×12 und 12×2; 3×8 und 8×3; 4×6 und 6×4.

[Dies wird auf obige Weise fortgesetzt.]

Fragen.

17, wie viel mal 8?

Antw. $2 \times 8 + \frac{1}{8} \times 8$. Denn $16 = 2 \times 8$; 17 ist 1 mehr als 16; 1 ist von 8 der achte Theil; folglich ist auch 17 $2 \times 8 + \frac{1}{8} \times 8$.

$\frac{7}{17}$ von 17, wie viel sind es Theile von 19?

Antw. $\frac{7}{19}$. Denn 1 ist von 17 der siebenzehnte, und von 19 der neunzehnte Theil; $\frac{7}{17}$ ist 7 mal $\frac{1}{17}$; $7 \times \frac{1}{17}$ von 17 sind $7 \times \frac{1}{19}$ von 19.

$\frac{18}{22}$ von 22, wie viel mal ist es 6?

Antw. 3×6. Denn $\frac{1}{22}$ von 22 ist 1×1; $\frac{18}{22}$ von 22 ist 18×1; $18 \times 1 = 3 \times 6$.

Man begreift leicht, daß hier alles darauf abgesehen ist, eine jede gegebene Zahl in mannigfaltiger Beziehung als Bestandtheil der andern betrachten zu lehren.

§. 113.

Da ein Ganzes nichts weiter bedeutet, als der Inbegriff seiner Theile, so muß auch eine jede Vollständigkeit der Theile ein Ganzes ausmachen. Wie viel der Werth eines jeden betrage, das ist hier ganz gleichgültig. Sind nun zwei oder mehrere Ganze da, von denen ich mir ein jedes in gleiche Theile zerlegt denke, so wird jeder Theil des einen Ganzen gleich seyn einem jeden Theile des andern Ganzen. Werden beide Theile zusammengethan, so machen sie zwei solcher Theile eines vorhin benannten Ganzen aus. Man denke sich z. B. 2×5 hingelegt. Hier ist der fünfte Theil von ein mal 5 eins, und der fünfte Theil von dem andern mal 5 ist ebenfalls eins. Stelle ich nun beide zusammen, so sind es zwei Fünftheile eines Ganzen. Jetzt denke man sich keine bestimmte Zahl mehr, so wird man begreifen, daß, so wie der fünfte Theil von einem Ganzen ein Fünftel ist, eben so der fünfte Theil von zwei Ganzen seyn müsse $\frac{2}{5}$ von einem Ganzen, und eben so der fünfte Theil von drei Ganzen gleich seyn müsse $\frac{3}{5}$ von einem Ganzen. Kommt die Anzahl der Theile gleich seinem Numerus, oder derjenigen Zahl, nach welcher die Theile des Ganzen benannt sind, so bilden diese zusammen dann hinwiederum ein Ganzes. So ist der fünfte Theil von $5 = \frac{5}{5}$ oder ein Ganzes. Suche ich aber den fünften Theil von 6, so ist dies $\frac{6}{5}$.

Da nun $\frac{5}{5}$ ein Ganzes ausmacht, so ist $\frac{6}{5}$ $\frac{1}{5}$ mehr als eins.

Uebung.

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$ u. s. f. sind ein Ganzes.

$\frac{1}{2}$ von 3 sind drei Halbe, oder ein Ganzes und ein Halb. $\frac{1}{2}$ von 4 ist 2. $\frac{1}{2}$ von 5 ist 2 und $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{3}$ von 1 ist $\frac{1}{3}$, von 2 $=$ $\frac{2}{3}$, von 3 ist es $\frac{3}{3}$ oder ein Ganzes; von 4 ist es 1 und $\frac{1}{3}$, von 5 $=$ 1 und $\frac{2}{3}$ u. s. f.

$\frac{1}{4}$ von 1 $=$ $\frac{1}{4}$, von 2 $=$ $\frac{2}{4}$, von 3 $=$ $\frac{3}{4}$, von 4 $=$ $\frac{4}{4}$ oder ein Ganzes, von 5 $=$ $\frac{5}{4}$ oder 1 $+$ $\frac{1}{4}$ u. s. f.

$\frac{1}{5}$ von 1 u. s. f., von 6 $=$ 1 $+$ $\frac{1}{5}$.

Dasselbe wird mit allen übrigen Zahlen wiederholt. Da zwei Halbe ein Ganzes ausmachen, so wird man die Hälfte von einer jeden Zahl finden, so bald man fragt, wie viel mal sie 2 ausmacht. So ist die Hälfte von 7 3 $+$ $\frac{1}{2}$, weil 7 3 $\times$ 2 und $\frac{1}{2}$ $\times$ 2 ist. Eben so muß der dritte Theil irgend einer Zahl aus demselben Grunde so viel ausmachen, als die Drei in ihr enthalten ist. Dasselbe gilt auch von der Vier und allen andern Zahlen. Da nun in dem Vorhergehenden schon gelehrt worden ist, auf welche Art man finden könne, wie viel mal irgend eine gegebene kleine Zahl in einer größern enthalten sey, so dürfen im Grunde nur dieselben Uebungen wiederholt werden, um zu finden, wie viel irgend ein Theil einer ganzen Zahl betrage. So ist z. B. ein Halb von 15

$7 + \frac{1}{2}$. Denn ein Halb von eins ist $\frac{1}{2}$; ein Halb von 15 ist $\frac{15}{2}$; 15 Halbe sind $7 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2$ Halbe; folglich ist $\frac{1}{2}$ von 15 $7 + \frac{1}{2}$. Der dritte Theil von 15 ist 5. Der vierte Theil ist $3 + \frac{3}{4}$. Denn 15 ist dreimal $4 + \frac{3}{4} \times \frac{4}{4}$, oder $3 + \frac{3}{4}$. Der fünfte Theil von 15 ist 3. Denn der fünfte Theil von 15 ist $\frac{15}{5}$, d. i. $3 \times \frac{5}{5}$ oder 3 Ganze. Der sechste Theil von 15 ist $2 + \frac{3}{6}$. Denn 15 ist $2 \times 6 + \frac{3}{6}$, oder $2 + \frac{3}{6}$ u. s. f.

Fragen.

Der dritte Theil von 17, wie viel beträgt er?

Antw. $5 + \frac{2}{3}$. Denn der dritte Theil von eins ist ein Drittel; der dritte Theil von 17 sind $\frac{17}{3}$; $\frac{15}{3}$ sind $5 \times \frac{3}{3}$; $\frac{17}{3} = 5 \times \frac{3}{3}$ und $\frac{2}{3} \times \frac{3}{3}$, oder 5 Ganze und $\frac{2}{3}$.

$\frac{1}{4}$ von 13, wie viel beträgt es?

Antw. $3 + \frac{1}{4}$. Denn der vierte Theil von eins ist $\frac{1}{4}$; der vierte Theil von 13 ist $\frac{13}{4}$; $\frac{12}{4}$ sind $3 \times \frac{4}{4}$; $\frac{13}{4}$ sind 3×4 und $\frac{1}{4} \times \frac{4}{4}$ oder $3 + \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{7}$ von 19, wie viel beträgt es?

Antw. $2 + \frac{5}{7}$. Denn der siebente Theil von eins ist $\frac{1}{7}$; der siebente Theil von 19 ist $\frac{19}{7}$; $\frac{14}{7}$ sind $2 \times \frac{7}{7}$; $\frac{19}{7} = 2 \times 7 + \frac{5}{7} \times \frac{7}{7}$, oder 2 Ganze und $\frac{5}{7}$.

Der achte Theil von 71, wie viel?

Antw. $8 + \frac{7}{8}$. Denn der achte Theil von eins ist $\frac{1}{8}$; der achte Theil von 71 sind $\frac{71}{8}$; $\frac{64}{8}$ sind $8 \times \frac{8}{8}$; $\frac{71}{8} = 8 \times \frac{8}{8} + \frac{7}{8} \times \frac{8}{8}$ oder $8 + \frac{7}{8}$.

Der neunte Theil von 73, wie viel?

Antw. $8 + \frac{1}{9}$. Denn $\frac{1}{9}$ von $72 = 8 \times \frac{9}{9}$; $\frac{1}{9}$ von 73 ist $\frac{1}{9}$ mehr als $8 \times \frac{9}{9}$ oder $8 + \frac{1}{9}$.

Der sechste Theil von 18 und 15, wie viel macht er?

Antw. $5 + \frac{3}{8}$. Denn der sechste Theil von 18 ist $\frac{18}{6}$; $\frac{18}{6}$ sind $3 \times \frac{6}{8}$ oder 3 Ganze. Der sechste Theil von 15 sind $\frac{15}{6}$, das sind $2 \times \frac{6}{8}$ und $\frac{3}{8}$ oder $2 + \frac{3}{6}$; $3 + 2 + \frac{3}{6} = 5 + \frac{3}{8}$.

Der achte Theil von 19 und 22, wie viel?

Antw. $5 + \frac{1}{8}$. Denn 19 ist $\frac{2}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{8}{8}$ oder $2 + \frac{3}{8}$. 22 ist $2 \times 8 + \frac{6}{8} \times \frac{8}{8}$ oder $2 + \frac{6}{8}$. $2 + 2 = 4$; $\frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8}$ oder $1 \times 8 + \frac{1}{8} \times \frac{8}{8}$; $1 + \frac{1}{8}$ zu $4 = 5 + \frac{1}{8}$.

$\frac{1}{9}$ von 24 und 31, wie viel?

Antw. $6 + \frac{1}{9}$. Denn $24 = 2 \times 9 + \frac{6}{9} \times \frac{9}{9}$, das sind $2 + \frac{6}{9}$. $31 = 3 + \frac{4}{9} \times \frac{9}{9}$, das sind $3 + \frac{4}{9}$. $2 + 3 = 5$; $\frac{6}{9} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9}$, d. i. $1 + \frac{1}{9}$; dies zu $5 = 6 + \frac{1}{9}$.

Anhang.

Wenn man mehrere gleichartige Theile eines und desselben Ganzen finden will, so muß man sie natürlicher Weise auf dem Wege der Multiplication suchen. So bald ich weiß, daß der dritte Theil von 3×5 ist 1×5, so müssen $\frac{2}{3}$ auch seyn 2×5, d. i. 10; und wenn ich es weiß, daß der fünfte Theil von demselben Ganzen ist 3, so ist es natürlich, daß $\frac{4}{5}$ von 15 ist 4×3 oder 12. Es kann aber der Fall eintreten, daß der Theil irgend eines Ganzen eine ungerade Zahl sey. So ist z. B. der vierte Theil von $13\ 4 + \frac{1}{4}$. Hier versteht es sich, daß zuerst die Ganzen und dann die Theile auf eben dieselbe Weise verdoppelt werden. Gesetzt, es wäre $\frac{3}{4}$ von 15 zu su-

chen; so fragt man zuerst nach einem Viertel dieser Zahl: dies ist $3 + \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$ zu 3×3 und $3 \times \frac{3}{4} = 9 + \frac{9}{4}$. Diese $\frac{9}{4}$ sind hinwiederum $2 + \frac{1}{4}$. Kommen diese zu 9, so werden es $11 + 1$; folglich sind $\frac{3}{4}$ von 15 $11 + \frac{1}{4}$.

Die Uebungen werden am besten so gemacht, daß man die Bestandtheile einer größern Zahl als Theile des Ganzen auffaßt und behandelt. Z. B.

$16 = 4 \times 4$. Der vierte Theil von 4×4 ist 1×4; $\frac{2}{4}$ von 4×4 ist 2×4; $\frac{3}{4}$ von 4×4 ist 3×4; 3×4 ist 12; 4×4 ist 16; 12 ist $\frac{3}{4}$ von 16 u. s. f.

$20 = 5 \times 4$. Der fünfte Theil von 5×4 ist 1×4; ein mal 4 ist 4; 5×4 ist 20; 4 ist $\frac{1}{5}$ von 20; $\frac{2}{5}$ von 20 ist 2×4; zwei mal 4 ist 8; 5×4 ist 20; 8 ist $\frac{2}{5}$ von 20; $\frac{3}{5}$ von 5×4 ist 3×4 u. s. f.

§. 14.

Was von einfachen Zahlen gilt, das gilt allezeit auch von zusammengesetzten, so bald sie nach den einfachen benannt sind. Es erfordert also gar keine veränderte Ansicht der Sache, um gewisse Theile von den Zig (Zehnern) zu finden. Nur müssen dann die Theile in demselben Verhältnisse mehr betragen, als ihre Ganzen. Sind die Ganzen Zig, so müssen

es auch die Theile seyn. Sind die Ganzen Hunderte, so sind es nicht minder die Theile.

Uebung.

$\frac{1}{2}$

von zwei Zig ist ein Zig; ein halb von 3 Zig ist ein und ein halb Zig; ein halb Zig ist 5; ein Zig und 5 ist 15.

v. 40 = 20.
v. 50 = 20 + $\frac{1}{2}$ Zig oder 25.
v. 60 = 30.
v. 70 = 30 + $\frac{1}{2}$ Zig oder 35.

$\frac{1}{3}$

von ein Zig ist ein drittel Zig; ein drittel Zig ist $\frac{1}{3}$ von 10, das ist 3 + $\frac{1}{3}$.

v. 20 = $\frac{2}{3}$ Zig oder 2 × 3 + $\frac{1}{3}$, d. i. 6 + $\frac{2}{3}$.
v. 30 = 1 Zig oder 10.
v. 40 = 1 + $\frac{1}{3}$ Zig oder 13 + $\frac{1}{3}$.
v. 50 = 1 + $\frac{2}{3}$ Zig oder 16 + $\frac{2}{3}$.
v. 60 = 2 Zig oder 20.
v. 70 = 2 + $\frac{1}{3}$ Zig oder 23 + $\frac{1}{3}$.
v. 80 = 2 + $\frac{2}{3}$ Zig oder 26 + $\frac{2}{3}$ u. s. f.

$\frac{1}{4}$

von ein Zig ist ein viertel Zig, d. i. 2 + $\frac{1}{2}$.

v. 20 = $\frac{2}{4}$ Zig.
v. 30 = $\frac{3}{4}$ Zig oder 3 × 2 + $\frac{1}{2}$, d. i. 7 + $\frac{1}{2}$.
v. 40 = 1 Zig oder 10.
v. 50 = 1 + $\frac{1}{4}$ Zig oder 12 + $\frac{1}{2}$.
v. 60 = 1 + $\frac{1}{2}$ Zig oder 15.

$\frac{1}{4}$

v. 70 = 1 + $\frac{3}{4}$ Zig oder 17 + $\frac{1}{2}$.
v. 80 = 2 Zig oder 20.
v. 90 = 2 + $\frac{1}{2}$ Zig oder 22 + $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{5}$

von ein Zig ist ein fünftel Zig oder $\frac{1}{5}$ von 10, d. i. 2.
v. 20 = $\frac{2}{5}$ Zig, oder 2 × 2 = 4.
v. 30 = $\frac{3}{5}$ Zig, oder 3 × 2 = 6.
v. 40 = $\frac{4}{5}$ Zig, oder 4 × 2 = 8.
v. 50 = $\frac{5}{5}$ Zig, oder ein Zig = 10.
v. 60 = 1 + $\frac{1}{5}$ Zig oder 12 u. s. f.

$\frac{1}{6}$

von ein Zig ist ein sechstel Zig, oder $\frac{1}{6}$ von 10, d. i. 1 + $\frac{4}{6}$.
v. 20 = $\frac{2}{6}$ Zig, oder $\frac{2}{6}$ von 10, d. i. 2 × 1 + $\frac{4}{6}$; 2 × 1 = 2; 2 × $\frac{4}{6}$ = $\frac{8}{6}$, das sind 1 + $\frac{2}{6}$; dies zu 2 werden 3 + $\frac{2}{6}$.
v. 30 = $\frac{3}{6}$ Zig, oder $\frac{3}{6}$ von 10, das sind 5.
v. 40 = $\frac{4}{6}$ Zig sind 4 × 1 + 4 × $\frac{4}{6}$; 4 × 1 = 4; 4 × $\frac{4}{6}$ = $\frac{16}{6}$, d. i. 2 + $\frac{4}{6}$; dies zu 4 sind 6 + $\frac{4}{6}$.
v. 50 = $\frac{5}{6}$ Zig, das sind 5 × 1 + 5 × $\frac{5}{6}$; 5 × 1 = 5; 5 × $\frac{5}{6}$ = $\frac{25}{6}$, d. i. 4 + $\frac{1}{6}$ zu 5 sind 9 + $\frac{1}{6}$.
v. 60 = 1 Zig oder 10 u. s. f.

$\frac{1}{7}$

v. 80 = 1 Zig + $\frac{1}{7}$ Zig; ein siebentel Zig ist 1 + $\frac{3}{7}$; dies zu 10 = 11 + $\frac{3}{7}$.

$\frac{1}{7}$

v. 90 = 1 + $\frac{2}{7}$ Zig; 10 + 2 × 1 + $\frac{3}{7}$ oder 2 + $\frac{6}{7}$ zu 10 = 12 + $\frac{6}{7}$.

v. 100 = 1 + $\frac{3}{7}$ Zig; 10 + 3 × 1 + $\frac{3}{7}$; 3 × 1 = 3; 3 × $\frac{3}{7}$ = $\frac{9}{7}$, d. i. 1 + $\frac{2}{7}$ zu 3 × 4 + $\frac{2}{7}$; dies zu 10 = 14 + $\frac{2}{7}$.

v. 110 oder 11 Zig = 1 + $\frac{4}{7}$ Zig oder 10 + $\frac{4}{7}$; $\frac{4}{7}$ von 10 = 4 × 1 + $\frac{3}{7}$; 4 × 1 = 4; 4 × $\frac{3}{7}$ = $\frac{12}{7}$, d. i. 1 + $\frac{5}{7}$ zu 4 = 5 + $\frac{5}{7}$; dies zu 10 = 15 + $\frac{5}{7}$.

$\frac{1}{8}$

v. 80 = 1 Zig oder 10.

v. 90 = 1 + $\frac{1}{8}$ Zig oder 10 + $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$ von 10 ist 1 + $\frac{2}{8}$; 1 + $\frac{2}{8}$ zu 10 = 11 + $\frac{2}{8}$.

v. 100 = 1 + $\frac{2}{8}$ Zig oder 12 + $\frac{4}{8}$.

v. 110 = 1 + $\frac{3}{8}$ Zig oder 13 + $\frac{6}{8}$.

v. 120 = 1 + $\frac{4}{8}$ Zig oder 15.

$\frac{1}{9}$

von 90 = 1 Zig oder 10.

v. 100 = 1 + $\frac{1}{9}$ Zig oder 1 × 10 + $\frac{1}{9}$ × 10; $\frac{1}{9}$ × 10 ist 1 + $\frac{1}{9}$; dies zu 10 machen 11 + $\frac{1}{9}$.

v. 11 Zig = 1 + $\frac{2}{9}$ Zig oder 12 + $\frac{2}{9}$.

v. 12 Zig = 1 + $\frac{3}{9}$ Zig oder 13 + $\frac{3}{9}$.

v. 13 Zig = 1 + $\frac{4}{9}$ Zig oder 14 + $\frac{4}{9}$.

v. 14 Zig = 1 + $\frac{5}{9}$ Zig oder 15 + $\frac{5}{9}$ u. s. f.

Die Aufgaben sind hier eben so einzurichten, als in den Uebungen mit einfachen Zahlen. Z. B.

½ von 50, wie viel beträgt es?

Antw. 25. Denn ein Halb von 50 ist 2 Zig und ein halb Zig; ein halb Zig ist ein Halb von 10, d. i. 5; dies zu 20 = 25.

½ von 57?

Antw. Ein Halb von 50, und ½ von 7. Ein Halb von 50 = 25 + ½; von 7 ist 3 + ½; dies zu 25 macht 28 + ½.

⅓ von 74?

Antw. 24 + ⅔. Denn ⅓ von 74 ist ⅓ von 70 und ⅓ von 4. Ein Drittel von 70 ist 2 Zig und ⅓ Zig; ⅓ Zig ist 3 + ⅓; 3 + ⅓ zu 20 ist 23 + ⅓. ⅓ von 4 ist 1 + ⅓. 23 + ⅓ und 1 + ⅓ = 24 + ⅔.

⅐ von 96?

Antw. 13 + ⅝. Denn ⅐ von 90 ist 1 + ⅖ Zigs. ⅖ von 10 sind 2 + ⅕; ⅐ von 6 = ⅚; 10 + 2 ist 12; ⅚ + ⅚ = ¹²⁄₇ oder 1 + ⅝; dies zu 12 machen 13 + ⅝. Oder auch: 96 ist 70 + 26. Der siebente Theil von 70 ist 10; der siebente Theil von 26 = 3 + ⅝; 3 + ⅝ zu 10 machen 13 + ⅝.

Zur größern Gewandheit kann man sich beider Arten von Auflösungen bedienen.

Eben so kann man auch ähnliche Aufgaben auflösen. Durch vorhergegangene Uebungen ist schon die Multiplication einer jeden Zahl von eins bis zehn geschehen. Zehn, oder Zig, schließt allezeit eine Zahlenreihe. Bei der Multiplication, d. i. der gleichförmigen Vermehrung, ist eine jede zusammengesetzte Zahl als eine Einheit zu betrachten; so, daß man

z. B. die Drei nicht als drei Einer, sondern als einen Inbegriff von drei Einheiten auffaßt, welchen man durch die Worte ein Mal drei ausdrückt. So wie nun von ein Mal eins die Zehn, oder ein Zig, die Zahlenreihe der Einheiten schließt, so schließt auch von drei 3×3, oder drei Zig, die Zahlenreihe der Drei, und 40 die Zahlenreihe von 4 u. s. f. Durch vorhergegangene Uebungen wurde es uns aber geläufig, einen jeden Theil irgend einer Zahl, so bald er nicht über seine Zahlenreihe hinausgeht, zu finden. Wollte man z. B. den dritten Theil von 29 finden, so durfte man sich nur erinnern, daß 27 gleich ist 9×3, und $29 = 9 + \frac{2}{3} \times 3$, daß also der dritte Theil von 29 sey $9 + \frac{2}{3}$. Dreißig ist aber der Schluß der Zahlenreihe von 3, und der dritte Theil ist daher ein Zig, oder Zehn. Will man nun den dritten Theil von 31 wissen, so nimmt man allezeit die Zahlenreihe 30, und dann die Summe, die darüber ist, besonders. Also hier erst den dritten Theil von 30, d. i. 10, und den dritten Theil von 1, d. i. $\frac{1}{3}$.

Auf diese Weise wird man folgende Aufgaben lösen:

Der dritte Theil von 42 ist 14; 42 ist $30 + 12$. Der dritte Theil von 30 ist 10; der dritte Theil von 12 ist 4; $10 + 4 = 14$.

Der 9te Theil von $100 = 11 + \frac{1}{9}$. Denn 100 ist $90 + 10$; $\frac{1}{9}$ von $90 = 10$; $\frac{1}{9}$ von 10 ist $1 + \frac{1}{9}$; $10 + 1 + \frac{1}{9} = 11 + \frac{1}{9}$.

Der 8te Theil von 98 = 12 + $\frac{2}{8}$. Denn 98 ist 80 + 18; der 8te Theil von 80 = 10; der 8te Theil von 18 = 2 + $\frac{2}{8}$; 1 + 2$\frac{2}{8}$ = 12 + $\frac{2}{8}$.

§. 15.

Um noch kleinere Theile von irgend einer gegebenen Zahl zu finden, könnte man auf eben die Weise verfahren, als vorher. Man darf nämlich die Zahl, nach welcher der gesuchte Theil genannt ist, mit derjenigen, die getheilt werden soll, nur zusammenhalten, und nun sehen, wie viel mal die erstere wiederholt werden muß, um die letztere zu erhalten. Da in dem Vorhergehenden schon die Vermehrung der Zahlen, welche über Zig hinausgehen, geschehen ist, so darf nun nur die Anwendung davon gemacht werden. Weiß man z. B. daß 2 × 13 = 26 ist, so weiß man auch, daß der 13te Theil von 26 = 2, und von 27 wäre er dann 2 + $\frac{1}{13}$. So wie 10 die Reihe der Einheiten, 20 die Reihe der Zweier, und 100 die Reihe der Zehner schließt; so schließt auch 130 die Reihe der Dreizehner, 140 die Reihe der Vierzehner u. s. f. Diese Uebungen bedürfen hier keiner besondern Erörterung. Aber eine andere Art, die gegebenen Theile zu finden, ist nicht minder zuverlässig, und noch schneller zu bewerkstelligen. Man nimmt nämlich die Zig als den Maßstab an. Was von zwei Zig z. B. $\frac{1}{11}$ ist, das ist von ein Zig $\frac{2}{11}$; der eilfte Theil von drei Zig ist drei Eilftel von ein Zig u. s. f. Jetzt sucht

man durch verschiedene arithmetische Operationen zu finden, wie viel jeder aliquote Theil betrage. Es giebt einen doppelten Weg dies zu finden. Man kann nämlich entweder die Summe in Anschlag bringen, die noch fehlt, um eine Anzahl Ganze zu erhalten; oder man kann den Rest, der eine gewisse Anzahl von Ganzen übersteigt, berücksichtigen. Ein Beispiel mag dies erläutern. Es soll z. B. der eilfte Theil von 20 gefunden werden. Nach dem Obigen ist der eilfte Theil von zwei Zig $\frac{2}{11}$ von ein Zig. Jetzt muß ich, wie allenthalben, von der Eins ausgehen, und zuerst fragen: wie viel ein Eilftel von ein Zig sey? das sind $\frac{10}{11}$; also zwei Eilftel wären so nach $2 \times \frac{10}{11}$ oder $\frac{20}{11}$, d. i. $1 + \frac{9}{11}$. Dies wäre der zu letzt beschriebene Weg. Allein die Auflösung liegt näher. Denn vor erst sehen wir, daß $\frac{10}{11}$ nur $\frac{1}{11}$ weniger sey, als ein Ganzes; $\frac{2}{11}$ von 10 muß folglich $\frac{2}{11}$ weniger seyn, als zwei Ganze; zwei Eilftel von $\frac{11}{11}$ bleiben $\frac{9}{11}$; also $1 + \frac{9}{11}$. Dies greift überall durch. Man suche den 11ten Theil von 90. Es ist $\frac{9}{11}$ von ein Zig; ein Eilftel von 10 ist $\frac{10}{11}$, oder $\frac{1}{11}$ weniger als eins; $\frac{9}{11}$ Zig ist folglich $\frac{9}{11}$ weniger als 9; 9 Eilftel von 9 bleiben $8 + \frac{2}{11}$. Anders wird das Verfahren seyn müssen, wenn z. B. der 19te Theil zu suchen ist. Hier wird die 10 allerdings auch zum Maßstabe dienen; aber es würde ein Umweg seyn, wenn man die Zahl nach dem messen wollte, wie viel sie weniger sey, als ein Ganzes. Die Auflösung

liegt hier eben so nahe, als irgendwo. Sind $\frac{2}{19}$ von 10 zu suchen, so darf man nur so verfahren: $\frac{1}{19}$ von 10 ist $\frac{10}{19}$; $\frac{2}{19} = 2 \times \frac{10}{19}$ oder $\frac{20}{19}$, d. i. $1 + \frac{1}{19}$. Sind aber $\frac{4}{19}$ zu suchen, so spricht man: $\frac{2}{19}$ ist $1 + \frac{1}{19}$; $\frac{4}{19}$ ist $2 \times \frac{2}{19}$; folglich $2 + \frac{2}{19}$; $3 + \frac{10}{19}$ u. s. f. Man suche nun den 19ten Theil von 140. Er ist $\frac{14}{19}$ von 10; $\frac{2}{19}$ von 10 ist $2 \times \frac{10}{19}$ oder $\frac{20}{19}$, d. i. $1 + \frac{1}{19}$; $\frac{14}{19} = 7 \times \frac{2}{19}$; folglich $7 \times 1 + \frac{1}{19}$, d. i. $7 + \frac{7}{19}$. Wäre es der 19te Theil von 150, so würde es $\frac{1}{19}$ Zig oder $\frac{10}{19}$ mehr seyn; diese kämen zu $\frac{7}{19}$, und es wäre nun die Summe von $7 + \frac{17}{19}$.

Werden die Zahlen um ein zu Bedeutendes größer, so, daß sie nicht mehr so leicht übersehen werden können, so kommt dann erst die eigentliche Rechenkunst, oder die Rechnung mit Ziffern, zu Hülfe, von der wir unten besonders handeln werden.

Nur eine Uebung mit zwei Zahlen halte ich für nöthig als Beispiel durchzuführen.

$\frac{1}{13}$ v. 10 $= \frac{10}{13}$ od. $\frac{3}{13}$ weniger als ein Ganzes.
$\frac{2}{13} = 2 \times \frac{3}{13} < 2$ oder $1 + \frac{7}{13} = \frac{1}{13}$ von 20.
$\frac{3}{13} = 3 \times \frac{2}{13} < 3$ oder $2 + \frac{4}{13} = \frac{1}{13}$ von 30.
$\frac{4}{13} = 4 \times \frac{2}{13} < 4$ oder $3 + \frac{1}{13} = \frac{1}{13}$ von 40.
$\frac{5}{13} = 5 \times \frac{3}{13}$ od. $\frac{15}{13} < 5$ od. $3 + \frac{11}{13} = \frac{1}{12}$ v. 50.
$\frac{6}{13} = 6 \times \frac{3}{13}$ oder $1 + \frac{5}{13} < 6$, d. i. $4 + \frac{8}{13} = \frac{1}{13}$ von 60.
$\frac{7}{13} = 7 \times \frac{2}{13}$ oder $1 + \frac{8}{13} < 7$, d. i. $5 + \frac{5}{13} = \frac{1}{13}$ von 70.

$1\frac{8}{13} = 8 \times \frac{3}{13}$ oder $1 + \frac{11}{13} < 8$, d. i. $6 + \frac{12}{13}$
$= \frac{1}{13}$ von 80.
$1\frac{9}{13} = 9 \times \frac{3}{13}$ oder $2 + \frac{1}{13} < 9$, d. i. $6 + \frac{12}{13}$
$= \frac{1}{13}$ von 90.
$\frac{10}{13} = 10 \times \frac{3}{13}$ oder $2 + \frac{4}{13} < 10$, d. i. $7 + \frac{9}{13}$
$= \frac{1}{13}$ von 100.
$\frac{11}{13} = 11 \times \frac{3}{13}$ oder $2 + \frac{7}{13} < 11$, d. i. $8 + \frac{6}{13}$
$= \frac{1}{13}$ von 110.
$\frac{12}{13} = \frac{1}{13} <$ als 10, oder $9 + \frac{3}{13} = \frac{1}{13}$ v. 120.
$\frac{13}{13} = 10$, oder $10 = \frac{1}{13}$ von 130.

$\frac{1}{17}$

v. $20 = \frac{2}{17}$ v. 10, oder $1 + \frac{3}{17}$.
v. $30 = \frac{3}{17}$ v. 10, oder $1 + \frac{13}{17}$.
v. $40 = \frac{4}{17}$ v. 10, oder $2 + \frac{6}{17}$.
v. $50 = \frac{5}{17}$ v. 10 ($\frac{2}{17}$ v. 10 ist $1 + \frac{3}{17}$; $\frac{4}{17}$ ist folglich $2 + \frac{6}{17}$; 5 ist eins mehr als 4; folglich $\frac{10}{17}$ zu $\frac{6}{17}$ sind $2 + \frac{16}{17}$).
v. $60 = \frac{6}{17}$ v. 10, od. $3 \times 1 + \frac{8}{17}$, d. i. $3 + \frac{9}{17}$.
v. $70 = \frac{7}{17}$ v. 10, od. $3 \times 1 + \frac{3}{17} + \frac{10}{17} = \frac{19}{17}$,
d. i. $1 + \frac{2}{17}$, oder $4 + \frac{2}{17}$.

Man weiß nämlich, daß $\frac{2}{17}$ von 10 $1 + \frac{3}{17}$ machen; $\frac{6}{17}$ ist drei mal $\frac{2}{17}$; folglich auch 3 mal 1 und drei mal $\frac{3}{17}$. Nun ist aber $\frac{7}{17}$ noch $\frac{1}{17}$ von 10 oder $\frac{10}{17}$ mehr, als $3 + \frac{9}{17}$; dies muß folglich zu der so eben gefundenen Summe hinzugefügt werden. Die $\frac{10}{17}$ rechnet man natürlich zu den schon vorhandenen $\frac{9}{17}$. Da aber nur $\frac{7}{17}$ zu einem Ganzen erfordert werden, und die vorhandenen $\frac{19}{17}$ das Ganze um $\frac{2}{17}$ übertreffen, so wird dies mit den 3

schon vorhandenen $4 + \frac{2}{17}$ ausmachen; $\frac{1}{17}$ von 80 ist diesem nach $4 \times 1 + \frac{3}{17}$, d. i. $4 + \frac{12}{17}$. Leichter noch ist es, wenn man z. B. $\frac{2}{17}$ von 80 wissen will. Denn dann darf man nur $\frac{2}{17}$ von 8 nehmen, d. i. $\frac{16}{17}$; dies ist hier wieberum $\frac{1}{17}$ weniger als 1; folglich $\frac{1}{17}$ weniger als Zig, d. i. $9 + \frac{7}{17}$. Will man den 17ten Theil von 180 wissen, so darf man ebenfalls nur den 17ten Theil von 18 suchen; dieser ist $1 + \frac{1}{17}$; von 180 also $1 + \frac{1}{17}$ Zig, das ist $10 + \frac{10}{17}$. Will man mehrere 17 Theile von derselben Anzahl finden, so darf man zunächst nur die einfachen Zahlen verdoppeln; so wird z. B. $\frac{7}{17}$ von 180 seyn $70 + \frac{7}{17}$ Zig, das sind $4 + \frac{2}{17}$; also $74 + \frac{2}{17}$. Will man von einer noch größern Zahl eine gewisse Anzahl von denselben Theilen erfahren, so verfährt man auf eben dieselbe Weise. Es wäre z. B. der 17te Theil von 300 zu suchen; so fragt man nach dem 17ten Theil von 30, d. i. $1 + \frac{13}{17}$; von 300 also $10 + \frac{13}{17}$ von 10, d. i. $\frac{3}{17}$ weniger als 10; $\frac{3}{17}$ von 10 ist $\frac{30}{17}$ oder $1 + \frac{13}{17}$; diese von 10 hinweggenommen, bleiben $8 + \frac{4}{17}$; folglich sind es $18 + \frac{4}{17}$. Von 3000 sind es 18 Zig $+ \frac{3}{17}$ Zig; 18 Zig ist 180; $\frac{3}{17}$ Zig ist $1 + \frac{13}{17}$; folglich $181 + \frac{13}{17}$.

Sind die Zahlen sich noch mehr ungleich, so sucht man sich auf verschiedene Weise zu helfen. Gesetzt, es wäre der 17te Theil von 35 zu suchen; so würde man gleich sehen, daß dieser Theil von 34 genommen, gerade 2 beträgt; von 35 folglich $2 + \frac{1}{17}$; von 350

2 Zig + $\frac{1}{17}$ Zig, d. i. 20 + $\frac{10}{17}$; von 3500 205 + $\frac{15}{17}$.

Auf diese und ähnliche Weise verfährt man mit allen andern Zahlen. Es ist nicht nöthig, daß der Lehrer eine übermäßig große Zahlenreihe mit gleicher Vollständigkeit behandele. Nur ein nöthiges Maß von Uebungen ist erforderlich, damit der Schüler Gewandheit bekomme, und die Seelenkräfte desselben gehörig in Thätigkeit gesetzt werden.

§. 16.

Alle Zahlen stehen, so bald sie mit einander verglichen werden, in einem nothwendigen Verhältnisse. So ist eins von 3 immer der dritte, und von 4 der vierte Theil. Dies Verhältniß läßt sich durchaus nie ändern. So wie aber das Verhältniß der einfachen Zahlen bestimmt ist, so ist es auch dasjenige der zusammengesetzten. Zwei mal eins oder zwei ist von zwei mal drei eben so wohl der dritte Theil, als ein mal eins von ein mal drei u. s. f.; und so wie ein mal drei die Zwei ein und ein halb mal enthält, so ist auch zwei mal drei ein und ein halb mal so viel als 2 × 2. Da nun $\frac{1}{2}$ von 2 × 2 = 1 × 2, und 1 × 2 zu 2 × 2 gleich ist 3 × 2, so ist auch 2 × 3 gleich 3 × 2. Eine jede zusammengesetzte Zahl verhält sich zu einer andern auf gleiche Weise zusammengesetzten, wie sich eine jede einfache zur andern einfachen verhält. Wenn man eine

gegebene zusammengesetzte Zahl in eine andere umsetzen will, (z. B. 4×5, wie viel mal 4?) so pflegt man erst durch Multiplication die Einheiten zu suchen, und durch Division den Quotienten, oder die gesuchte andere Zahl, zu finden. Dieser Weg ist aber indirect, und die Folge der noch lange nicht als nothwendige Regeln des Verfahrens legitimirten so genannten vier Species. Unmittelbar und ganz direct wird die Behandlung nach der oben aufgestellten Regel *), nach welcher das Ganze als die Folge der einfachen Zahlenverhältnisse hervorgeht.

Zur Uebung möge uns nur die Behandlung einiger Zahlen dienen. Zuerst die Zahl 12 und 16.

1×12 ist 3×4; 16 ist 4×4; 3×4 ist $\frac{3}{4}$ von 4×4, oder 12 ist $\frac{3}{4}$ von 16.
$2 \times 12 = \frac{3}{4}$ v. 2×16, od. $1 + \frac{1}{2} \times 16$.
$3 \times 12 = \frac{3}{4}$ v. 3×16, od. $\frac{9}{4}$, d. i. $2 + \frac{1}{4} \times 16$.

*) Zur Vergleichung gebe ich hier ein leichtes Beispiel nach beiden Verfahrungsarten. Es sey: 12×18, wie viel mal 16? Nach der gewöhnlichen Weise müßte man hier so verfahren:

$$\begin{array}{r} 18 \\ 12 \\ \hline 36 \\ 18 \\ \hline 216 \end{array}$$

16 | 2 1 6 (8 | 13 $\frac{8}{16}$
2 1 6
6 6
6
1

Nach der letzten Verfahrungsart spricht man: 18 ist $1 \times 16 + \frac{1}{8} \times 16$; folglich ist $12 \times 18 = 12 \times 16 + \frac{1}{8}$ von 12 mal 16, d. i. $1 + \frac{1}{2}$; dies in $12 = 13 + \frac{1}{2} \times 16$.

$4 \times 12 = \frac{3}{4}$ v. 4×16, od. $\frac{3}{4}$ v. 4, d. i. 3×16.
$5 \times 12 = \frac{3}{4}$ v. 5×16, od. $3 + \frac{3}{4} \times 16$.
$6 \times 12 = \frac{3}{4}$ v. 6×16, od. $4 + \frac{1}{2} \times 16$.

Die Zahl mag noch so zusammengesetzt seyn, so bleibt überall, wo 12 mit 16 zu vergleichen ist, das Verhältniß dreier Viertel zu seinem Ganzen. Eine Anzahl mal 12 genommen, ist allezeit drei Viertel derselben Anzahl mal 16. Man kann dies auch durch eine Probe bewähren. Z. B. 8×12 ist 6 mal 16, weil 6 drei Viertel von 8 ist. Denn $8 \times 12 = 96$; $6 \times 16 = 96$; folglich ist 8×12 gleich 6×16. Kommt es darauf an, das zu suchende Resultat möglichst schnell zu finden, so läßt man alle übrige Glieder durch, und sucht nur von dem Multiplicator, d. i. von der Zahl, welche anzeigt, wie oft die 12 da sey, $\frac{3}{4}$ nehmen, so hat man die gesuchte Zahl gefunden. Wäre 15 mal 12 vorhanden, so würde man geschwinde $\frac{3}{4}$ von 15, d. i. $11 + \frac{1}{4}$, suchen, und dadurch zugleich schon gefunden haben, daß es eben so viel mal (nämlich $11 + \frac{1}{4} \times$) 16 sey.

Es könnte aber auch umgekehrt die Frage seyn, wie viel mal eine gewisse Anzahl mal 16 mal 12 ausmache? Die erste Rücksicht bleibt hier immer dem Verhältnisse der einfachen Zahlen gleich; dies ist hier $16 + 12$; die erstere Zahl ist 4 mehr, als die zweite; und diese 4 ist von 12 der dritte Theil; 16 ist also $1 \times 12 + \frac{1}{3} \times 12$. Die Uebung ist daher:

$2 \times 16 = 2 + \frac{1}{3}$ v. 2×12.
$3 \times 16 = 3 + \frac{1}{3}$ v. 3×12 od. 4×12.
$4 \times 16 = 4 + \frac{1}{3}$ v. 4×12 od. $5 + \frac{1}{3} \times 12$.
$5 \times 16 = 5 + \frac{1}{3}$ v. 5×12 od. $6 + \frac{2}{3} \times 12$.
$6 \times 16 = 6 + \frac{1}{3}$ v. 6×12 od. 8×12 u. ſ. f.

Nimmt man nun andere ungleiche Zahlen zur Vergleichung, ſo bleibt das Verfahren immer dasſelbe.

Zur Uebung wählen wir 19 mit 25 verglichen:

$1 \times 19 = \frac{1}{2}\frac{9}{5}$ v. 1×25.
$2 \times 19 = \frac{1}{2}\frac{9}{5}$ v. 2×25 od. $1 + \frac{1}{2}\frac{3}{5} \times 25$.
$3 \times 19 = \frac{1}{2}\frac{9}{5}$ v. 3×25 od. $\frac{1}{2}\frac{8}{5}$ weniger als 3, d. i. $2 + \frac{7}{2}\frac{}{5}$.
$4 \times 19 = \frac{1}{2}\frac{9}{5}$ v. 4×25 od. $\frac{2}{2}\frac{4}{5}$ weniger als 4, d. i. $3 + \frac{1}{2}\frac{}{5}$.

Hier iſt ein bequemer Haltungspunkt. So wie 4×19 $3 + \frac{1}{2}\frac{}{5} \times 25$ iſt, ſo iſt 8×19, oder das Doppelte von 4×19, ebenfalls das Doppelte der $3 + \frac{1}{2}\frac{}{5} \times 25$; alſo $6 + \frac{2}{2}\frac{}{5} \times 25$. Die dreifache Zahl, nämlich 12, giebt folglich auch die dreifache Zahl von den $3 + \frac{1}{2}\frac{}{5} \times 25$, d. i. $9 + \frac{3}{2}\frac{}{5} \times 25$ u. ſ. f. Man darf übrigens nur geübt ſeyn, mit einiger Gewandheit die $\frac{1}{2}\frac{9}{5}$ von jeder Zahl aufzuſuchen, um ſogleich das geſuchte Reſultat zu finden. Dieſe Uebung wird hier vorausgeſetzt.

Aufgaben.

a) 4×20, wie viel mal 16?

Antw. 5×16. Denn 20 ist 4 mehr als 16; 4 ist aber von 16 ein mal der vierte Theil; folglich ist 20 ein mal $16 + \frac{1}{4} \times 16$; 4×20 muß daher seyn $4 \times 16 + \frac{1}{4}$ von 4×16; ein Viertel von 4 ist aber 1; dies zu 4 wird 5.

Probe: $4 \times 20 = 80$; 5×16 ist ebenfalls 80.

b) 12×17, wie viel mal ist es 24?

Antw. $8 + \frac{1}{2} \times 24$. Denn $12 \times 17 = 17 \times 12$; 1×12 ist von 24 $\frac{12}{24}$ oder $\frac{1}{2}$; 17×24 sind folglich $17 \times \frac{1}{2}$; $\frac{17}{2} \times 24$ sind aber $8 + \frac{1}{2} \times 24$; also sind auch 12×17 $8 + \frac{1}{2} \times 24$.

(Man muß sich gewöhnen, durchaus alle Vortheile zu benutzen, um desto leichter und tiefer ins Zahlenwesen hinein zu dringen. Ueberhaupt dürfen die vorhergehenden Stufen nie außer Acht gelassen werden.)

c) 21×25, wie viel mal 18?

Antw. $29 + \frac{1}{6}$. Denn $25 = 1 + \frac{7}{18} \times 18$; 21×25 ist folglich $1 \times 21 + \frac{7}{18} \times 21 \times 18$; $\frac{1}{18}$ von 21 ist $1 + \frac{3}{18}$ oder $\frac{1}{6}$; $\frac{7}{18}$ ist also $7 + \frac{7}{6}$ oder $8 + \frac{1}{6}$; dies zu 21, giebt $29 + \frac{1}{6}$. Oder: $21 \times 25 = 25 \times 21$; 1×21 ist $\frac{3}{18}$ oder $\frac{1}{6}$ mehr 1×18; 25×21 ist folglich ebenfalls $\frac{1}{6}$ mehr als 25×18; $\frac{1}{6}$ von 25 ist aber $4 + \frac{1}{6}$; dies zu 25, giebt $29 + \frac{1}{6}$.

d) 9×23, wie viel mal 32?

Antw. $6 + \frac{15}{32}$. Denn 23 ist von 32 $\frac{23}{32}$; folglich $\frac{23}{32}$ an 9×32, d. i. $\frac{9}{32}$ weniger als ein

Ganzes; $\frac{9}{3\frac{1}{2}}$ von 9 sind $\frac{8\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}$ oder $2 + \frac{1\frac{7}{2}}{3\frac{1}{2}}$; dies von 9 bleiben $6 + \frac{1\frac{5}{2}}{3\frac{1}{2}}$.

e) 12×60, wie viel mal 15?

Antw. 48×15. Denn 60 ist 4×15; 12×60 ist folglich $12 \times 4 \times 15$; $12 \times 4 = 48 \times 15$.

f) 12×23, wie viel mal 60?

Antw. $4 + \frac{3}{5} \times 60$. Denn $12 \times 23 = 23 \times 12$; 1×12 ist von 1×60 der fünfte Theil; 23×12 ist folglich ein mal der fünfte Theil von 23×60; der fünfte Theil von 23 ist $4 + \frac{3}{5}$; folglich ist auch 23×12 oder $12 \times 23 = 4 + \frac{3}{5} \times 60$.

g) 49×72, wie viel mal 36?

Antw. 98×36. Denn 72 ist 2×36; 49×72 ist folglich $2 \times 49 \times 36$, d. i. 98×36.

h) 18×76, wie viel mal 90?

Antw. 15×90. Denn 76 ist von 90 $\frac{76}{90}$ oder $\frac{15}{90}$, d. i. $\frac{1}{6}$ weniger als 1×90; 18×76 ist folglich $\frac{1}{6}$ weniger als 18×90; $\frac{1}{6}$ von 18 ist 3; dies von 18, bleiben 15×90.

§. 17.

In allen bisherigen Uebungen, welche sich mit der Theilung der Zahlen abgegeben haben, wurde vorausgesetzt, daß alle Theile sich gleich verhalten. Es kann aber auch Fälle geben, wo ein Ganzes in ungleiche Theile zerlegt werden soll. Bekannt ist hier, wie natürlich, die Summe, welche getheilt werden soll. Von den Theilen weiß man nur, um wie viel der eine kleiner oder größer ist, als der andere. Diesen Unterschied der Theile nehme man nun

sogleich von der zu theilenden Summe hinweg. Jetzt hat man nur nöthig, den Rest, oder die Zahl, welche noch übrig geblieben ist, in gleiche Theile zu zerlegen, Da man den Unterschied schon hat, so darf man diesen unter die gefundenen gleichen Theile nur so vertheilen, als es die gesuchten ungleichen Theile des Ganzen erfordern. Es sey z. B. die Zahl 30 in zwei ungleiche Theile zu theilen, deren erster 4 mehr betragen mag, als der zweite. Nimmt man den Unterschied zwischen dem ersten und zweiten Theile, d. i. 4, von der gegebenen Summe, d. i. hier 30, hinweg, so bleibt noch 26 als Rest. Diesen Rest in zwei gleiche Theile, ist 13 + 13. Den Unterschied 4 thut man jetzt zu der ersten 13, so wird der erste der gesuchten Theile von 15 vier mehr als der andere. Will man die Probe machen, so addire man nur beide Theile, und sehe zugleich, ob der Unterschied der Theile der Forderung gemäß sey. Natürlich mußte dies Resultat richtig werden; denn einer Seits nahmen wir von der gegebenen Summe eben so viel weg, als wir nachher einem dieser Theile hinwiederum verliehen; die Summe mußte demnach dieselbe bleiben; anderer Seits gaben wir diesen Unterschied der Theile dem einen Theil, der nun natürlich um so viel mehr betragen mußte. Es könnte aber auch verlangt werden, daß dieselbe Summe in drei ungleiche Theile getheilt werden sollte. Hier muß der Unterschied, der zwischen den drei Theilen

Statt findet, ebenfalls sogleich von der ganzen Summe hinweg genommen, und dann wie oben verfahren werden. Es sey z. B. dieselbe Zahl 30 in drei ungleiche Theile zu theilen, deren erster 4 mehr, als der zweite, und deren zweiter 5 weniger, als der dritte, betragen mag. Der Unterschied zwischen dem ersten und zweiten Theile ist hier 4, zwischen diesem und dem dritten aber 5. Der ganze Unterschied beträgt also 9; diese müssen nun als diejenigen Zahlen, welche die Ungleichheit der Theile ausmachen, sogleich der Summe entzogen werden. Hierauf bleiben noch 21 zu theilen übrig; diese in drei gleiche Theile, ist 7 + 7 + 7. Jetzt kann ich den Unterschied, das sind hier die 9, so vertheilen, als es gefordert wurde; nämlich 4 mehr sollte der erste betragen; diese 4 trage ich über zu 7, so wird der erste Theil 4 mehr, als der zweite; dieser soll aber nach der Forderung hinwiederum 5 weniger betragen, als der dritte; dies wird der Fall seyn, wenn ich dem dritten Theile die fünf noch übrig gebliebenen Einheiten des Unterschiedes zutheile. Sonach wären die gesuchten ungleichen Theile 11 + 7 + 12.

Uebung.

5 + 5 sind zwei gleiche Theile von 10.

5 + 6 sind zwei ungleiche Theile von 11, deren erster eins weniger beträgt, als der zweite.

5 + 7 sind zwei ungleiche Theile von 12, deren zweiter 2 mehr beträgt, als der erste.

5 + 8 sind zwei ungleiche Theile von 13, deren zweiter 3 mehr beträgt, als der erste u. s. f.

5 + 5 + 5 sind drei gleiche Theile von 15.

5 + 6 + 5 sind drei ungleiche Theile von 16, deren zweiter eins mehr beträgt, als der erste, und eins weniger, als der dritte.

5 + 7 + 6 sind drei ungleiche Theile von 18, deren erster zwei weniger beträgt, als der zweite, und deren zweiter eins mehr ist, als der dritte.

7 + 5 + 9 sind drei ungleiche Theile von 21, deren erster zwei mehr beträgt, als der zweite, und der zweite 4 weniger, als der dritte.

Diese Uebung hat blos den Zweck, den Unterschied gegebener ungleicher Theile in Beziehung auf ein Ganzes bemerkbar zu machen. — Die nächst folgende soll die Aufmerksamkeit des Schülers auf die Entstehung dieses Unterschiedes sowohl, als auch des Restes, welcher nach der obigen Regel in gleiche Theile zerlegt werden muß, richten.

Beispiele.

Zwei gleiche Theile von 20 sind 10 + 10. Wenn ich eins von dem ersten Theil nehme, und zu dem zweiten Theile hinzu lege, so wird der erste eins weniger als 10, oder 9, und der andere eins mehr als 10, oder 11. Der Unterschied zwischen 9 und 11 ist 2.

Wenn ich von dem einen Theile zwei nehme, und diese zu dem andern lege, so wird der erste um zwei weniger, und der andere um zwei mehr, als 10. Der Unterschied beträgt also 4. Die Theile sind 8 + 12.

Wenn ich von einem derselben gleichen Theile von 20 drei hinweg nehme, und diese zu dem andern hinzu thue, so wird die erste Zahl drei weniger als 10, d. i. 7, und die andere um eben so viel mehr, d. i. 13. Der Unterschied zwischen beiden Zahlen beträgt 6, u. s. f.

Wenn ich Zwanzig in zwei ungleiche Theile zerlegen will, welche um 8 verschieden seyn sollen, so kann ich die 20 erst in zwei gleiche Theile theilen, d. i. 10 + 10. Will ich den Unterschied haben, so nehme ich die Hälfte desselben, also 4, von der einen Zahl, und lege sie zu der andern, so wird eine Zahl um 4 größer, und die andere um eben so viel kleiner; der ganze Unterschied beträgt also 8, und die gesuchten ungleichen Theile sind 4 < 10 und 4 > 10, d. i. 6 + 14.

Oder:

Ich nehme den Unterschied 8 gleich von 20 hinweg, so bleibt mir noch 12; diese in zwei gleiche Theile, giebt 6 + 6. Nun nehme ich den Unterschied, d. i. die 8, und thue sie zu der einen 6, so entstehen 14 + 6; diese beiden Zahlen machen 20, und ihr Unterschied beträgt 8 *).

*) Hier muß die Anschauung durchaus zu Hülfe genommen werden, weil dadurch die Sache am deutlichsten in die Augen fällt. Die Bestimmtheit der Sprache, und der Zusammenhang der einzelnen Glieder der hier vorkommenden Sätze muß von dem Zöglinge beibehalten werden; nicht nur, um sich der größern Deutlichkeit zu versichern, sondern auch, weil das Rechnen überhaupt auch höhere Cultur des Geistes begünstigen soll.

[Die letzte Art des Verfahrens leidet die uneingeschränkteste Anwendung, und ist zugleich die einfachste; jedoch nur dann, wenn man sich durch das Vorhergegangene die Bahn gebrochen, und eingesehen hat, wie sich sowohl der Unterschied der Theile bildet, als auch der Weg, sie zu finden, offenbaret.]

Dasselbe läßt sich auch auf drei und mehrere Zahlen anwenden, wenn man nur den Unterschied der Theile und den Inhalt des Ganzen weiß.

Uebung.

Drei gleiche Theile von 30 sind $10 + 10 + 10$.

Wenn ich von der mittelsten Zahl eins nehme, und unter die drei vertheile, so wird die erste Zahl $10 + \frac{1}{3}$, die zweite aber $9 + \frac{1}{3}$ (denn von dieser wurde das Eine genommen), und die dritte Zahl wieder $10 + \frac{1}{3}$. Alsdann ist die erste Zahl eins mehr als die zweite, und die zweite ist eins weniger als die dritte. Die erste und dritte Zahl sind einander gleich; der Unterschied zwischen der ersten und zweiten Zahl ist eins, und zwischen der zweiten und dritten ebenfalls eins. Der Unterschied zwischen beiden Zahlen beträgt also 2.

Wenn ich diese zwei (d. i. den Unterschied) von der gegebenen Summe 30 wegnehme, so bleibt als Rest 28; theile ich diese in drei gleiche Theile, so wird es $9\frac{1}{3} + 9\frac{1}{3} + 9\frac{1}{3}$. Wenn ich nun zu der ersten Zahl den ganzen Unterschied 2 thäte, so würde diese 2 mehr betragen als die zweite, und die zweite bliebe der dritten gleich; thäte ich sie zur

zweiten, so würde diese zwei mehr, und die erste und dritte Zahl blieben sich gleich. Kämen beide zur letzten, so würde die erste und zweite sich gleich bleiben. Ich kann aber auch von dem Unterschiede 2 eins zur ersten und eins zur dritten Zahl thun, dann wird eine jede dieser beiden Zahlen eins mehr betragen als die zweite; oder die erste Zahl wird eins mehr betragen als die zweite, und diese eins weniger als die dritte.

[Man wird den Zweck dieses doppelten Verfahrens nicht verkennen; denn jenes erstere zeigt nur die Entstehung der ungleichen Theile; dies letztere aber macht darauf aufmerksam, wie durch Analyse gegebene Zahlen gefunden werden sollen.]

Wenn ich die Eins, welche ich von der mittelsten 10 nehme, in zwei gleiche Theile theile, und die eine Hälfte zu der ersten, die andere zu der dritten Zahl lege, so wird die erste $10\frac{1}{2}$, die zweite aber 9, und die dritte ebenfalls $10\frac{1}{2}$. Der Unterschied zwischen der ersten und zweiten ist dann $1\frac{1}{2}$, und zwischen der zweiten und dritten ebenfalls $1\frac{1}{2}$; dies macht zusammen drei. Nehme ich diese Drei gleich von der gegebenen ganzen Summe, d. i. 30, so bleiben 27; diese in drei gleiche Theile, giebt $9+9+9$. Wird die Drei, oder der Unterschied zwischen der ersten und dritten Zahl, getheilt, so wird eine jede dieser beiden Zahlen $1\frac{1}{2}$ größer als die zweite.

Wenn ich von der zweiten 10 die Eins wegnehme, und zu der ersten thue, so wird die erste eins mehr als 10, d. i. 11; die zweite eins weniger als 10, d. i. 9; und die dritte bleibt 10, d. i. eins mehr als 9 (oder als die zweite Zahl). Der Unterschied zwischen der ersten und zweiten Zahl ist 2, und zwischen der zweiten und dritten Zahl eins; der ganze Unterschied beträgt also 3. Die 30 ist dann in drei ungleiche Theile getheilt, von denen der erste 2 mehr beträgt als der zweite, und dieser eins weniger als der dritte. Die Theile sind 11 + 9 + 10.

[Man kann hieraus sehen, wie mannigfaltig und nach welchen Gesetzen die Zahlen sich durch kleine Veränderungen gestalten. Es wird zur Selbstübung nicht minder, als zur Beförderung der Zwecke des Unterrichts, nützlich seyn, dieses auf mehrere Zahlen sogleich über zu tragen, damit es zur klärsten Einsicht gebracht werde.]

Wenn ich von der zweiten eben dieser drei gegebenen gleichen Zahlen 2 wegnehme, so wird diese mittelste Zahl um 2 weniger, als eine jede der beiden andern; oder die erste beträgt zwei mehr als die zweite, und diese zwei weniger als die dritte; der Unterschied zwischen einer jeden von beiden Zahlen ist 2; der ganze Unterschied beträgt folglich 2 × 2 oder 4, und die Zahlen sind 10 + 8 + 10. Aber diese machen noch nicht 30, sondern es fehlen die beiden, die ich weggenommen. Wenn ich diese 2 unter drei Zahlen vertheile, so bekommt eine jede

$\frac{2}{3}$, und dann sind es $10\frac{2}{3} + 8\frac{2}{3} + 10\frac{2}{3}$. Jetzt ist die erste Zahl zwei mehr als die zweite, und diese zwei weniger als die dritte; der Unterschied beträgt also vier. Nehme ich diese gleich von der ganzen Summe 30, so bleiben noch 26; diese in drei gleiche Theile $8\frac{2}{3} + 8\frac{2}{3} + 8\frac{2}{3}$. Unter diese Zahlen kann ich jetzt den Unterschied vertheilen, so kommt dasselbe Resultat heraus. Vertheile ich aber dieselben von der mittelsten Zahl genommenen zwei unter die erste und dritte Zahl, so wird eine jede derselben eins mehr als 10, d. i. 11, und die mittelste zwei weniger als 10, d. i. 8. Der Unterschied zwischen der ersten und zweiten Zahl ist also 3, und zwischen dieser und der dritten ebenfalls 3; von beiden also 6.

Wenn ich aber diese beiden zu einer Zahl thue, z. B. zur ersten, so wird diese um zwei mehr als 10, d. i. 12, die zweite um zwei weniger, d. i. 8, und die dritte bleibt 10.

Von der mittelsten Zahl 3 weg:

$$10 + 10 + 10 = 30,$$

3 unter die erste und dritte Zahl vertheilt:

$$11\frac{1}{2} + 7 + 11\frac{1}{2};$$

(erste Differenz $4\frac{1}{2}$, zweite Diff. $4\frac{1}{2}$, d. i. 9.)

alle

alle zu einer:

13 + 7 + 10;

(erste Diff. 6, zweite Diff. 3, d. i. 9.)

oder:

10 + 7 + 13;

(erste Diff. 3, zweite 6 = 9.)

oder:

7 + 10 + 13; oder 10 + 13 + 7.

(Die Stellen ändern nichts.)

Umgekehrt:

Von 30 den Unterschied 9 abgezogen, bleibt 21; in drei gleiche Theile, giebt 7 + 7 + 7. Den Unterschied unter die erste und dritte vertheilt, d. i. zu jeder $4\frac{1}{2} = 11\frac{1}{2} + 11\frac{1}{2}$; oder eine soll 6, die andere 3 empfangen, dann ist es 13 + 7 + 10.

Von der mittelsten 4 weg, und unter die übrigen vertheilt:

10 + 10 + 10 = 30;

12 + 6 + 12;

(erste Diff. 6, zweite 6, d. i. 12; Summe 30.)

oder 4 ungleich vertheilt in 3 + 1:

13 + 6 + 11;

(erste Diff. 7, zweite 5 = 12; Summe 30.)

oder einer allein:

14 + 6 + 10;

(erste Diff. 8, zweite 4 = 12; Summe 30.)

[Auch hier empfehle ich die Veränderung der Stellen.]

Umgekehrt:

Von 30 die 12 als Differenz der Theile weg, bleibt 18, d. i. 6 + 6 + 6; die Differenz gleich vertheilt, ist 12 + 6 + 12 (oder 6 + 12 + 12, oder 12 + 12 + 6); ungleich, als 7 + 5, giebt 13 + 6 + 11 u. s. f.

Von einer Zahl 5 weg, und unter die andern vertheilt:

10 + 10 + 10 = 30;

5 gleich vertheilt, als $2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$:

$12\frac{1}{2}$ + 5 + $12\frac{1}{2}$;

(Diff. $7\frac{1}{2}$ + $7\frac{1}{2}$ = 15; Summe 30.

5 ungleich vertheilt, als 3 + 2:

13 + 5 + 12;

(Diff. 8 + 7 = 15; Summe 30.)

5 ungleich vertheilt, als 4 + 1:

14 + 5 + 11;

(Diff. 9 + 6 = 15; Summe 30.)

5 zu einer Zahl:

15 + 5 + 10;

(Differenz: 10 + 5 = 15.)

Umgekehrt:

die Differenz der Theile sey 15;

von der Summe 30 bleiben 15; diese in drei gleiche Theile, ist 5 + 5 + 5; die Differenz gleich vertheilt, ist $7\frac{1}{2}$; die Theile: $12\frac{1}{2}$ + 5 + $12\frac{1}{2}$. 8 zur ersten und 7 zur zweiten Zahl = 13 + 5 + 12. 9 zur ersten und 6 zur zweiten = 14 + 5 + 11 u. s. f.

[So wie hier diese Art der Uebungen, der größern Deutlichkeit wegen, an einem Beispiele durchgeführt ist, so ist es nöthig, daß dasselbe auch in der praktischen Ausübung zuförderst geschehe, und dann erst die Anwendung davon auf andere Zahlen gemacht werde; die übrigens, besonders, wenn man die vorausgesetzten Versinnlichungsmittel benutzt, nicht im mindesten schwierig seyn kann. Diese Uebung ist, vorzüglich in Rücksicht auf Verstandesbildung, sehr wichtig.]

Aufgaben.

1) 29 soll in drei ungleiche Theile getheilt werden, von denen der erste 4 mehr beträgt als der zweite, und der zweite 5 weniger als der dritte, wie viel wird ein jeder Theil betragen?

Antw. 11 + 7 + 12. Denn 29 ist die Summe, die in drei Theile getheilt werden soll; von diesen drei Theilen ist der erste 4 mehr als der zweite; der Unterschied zwischen den beiden ersten Theilen ist also 4. Der zweite Theil ist um 5 weniger als der dritte; der Unterschied ist also 5; diese mit der vorigen 4 ist 9. Nehme ich den Unterschied von der gegebenen Summe 30 weg, so bleibt noch 21; diese in drei gleiche Theile, ist 7 + 7 + 7. Gebe ich nun von dem Unterschiede 4 der ersten Zahl, so wird diese

11, und 5 der dritten, so wird diese 12; folglich sind 11 + 7 + 12 diejenigen Zahlen, deren erste 4 mehr als die zweite, die zweite 5 weniger als die dritte, und deren Summe 30 beträgt.

2) Drei ungleiche Zahlen, deren erste 12 mehr als die zweite, und diese 8 weniger als die dritte, und deren Summe 80 beträgt, welches sind die Zahlen?

Antw. 32 + 20 + 28. Denn die Differenz zwischen der ersten und zweiten Zahl ist 12, zwischen der zweiten und dritten 8, d. i. 20; diese von 80 weg, bleibt 60; dieselben in drei gleiche Theile, ist 20 + 20 + 20. Die erste Zahl soll 12 mehr betragen als die zweite, 20 + 12 = 32, die zweite 8 weniger als die dritte, folglich muß diese 8 mehr seyn als 20, d. i. 28. Die Zahlen sind 32 + 20 + 28.

Probe: Zwischen 32 und 20 sind 12 Unterschied; zwischen 20 und 28 sind 8 Unterschied, 32 + 20 = 52, und dazu 28 = 80.

3) Drei ungleiche Zahlen. Die erste ist 20 mehr als die zweite, und diese ist 38 weniger als die dritte; die Summe (Potenz) ist 170; welches sind die gesuchten Zahlen?

Antw. $57\frac{1}{3} + 37\frac{1}{3} + 75\frac{1}{3}$. Denn der Unterschied ist 20 + 38, d. i. 58. Die Summe ist 170; davon 58, bleiben 112; diese in drei gleiche Theile, ist $37\frac{1}{3} + 37\frac{1}{3} + 37\frac{1}{3}$; die erste Differenz 20 zur ersten Zahl, macht $57\frac{1}{3}$; die zweite Zahl bleibt $37\frac{1}{3}$, und ist 38 weniger als die dritte; folglich muß diese 38 mehr seyn als die zweite, $37\frac{1}{3} + 38 = 75\frac{1}{3}$. Die gesuchten 3 Zahlen sind also $57\frac{1}{3} + 37\frac{1}{3} + 75\frac{1}{3}$.

Probe: Der Unterschied zwischen $57\frac{1}{3}$ und $37\frac{1}{3}$ ist 20; der Unterschied zwischen $37\frac{1}{3}$ und $75\frac{1}{3}$ ist 38; $57\frac{1}{3} + 37\frac{1}{3}$ ist $94\frac{2}{3}$; dazu $75\frac{1}{3}$, macht $169 + \frac{3}{3}$, d. i. 1; dies zu $169 = 170$.

4) 285 soll in drei ungleiche Theile getheilt werden; von diesen ist der zweite 60, und der dritte 70 mehr als der erste; welches sind die Theile?

Antw. $111\frac{2}{3} + 51\frac{2}{3} + 121\frac{2}{3}$. Denn 285 ist die Summe; die Differenz der Theile $60 + 70$, d. i. 130; diese von 285, bleibt 155; drei gleiche Theile dieser Zahl sind $51\frac{2}{3} + 51\frac{2}{3} + 51\frac{2}{3}$; zur ersten Zahl 60, giebt $111\frac{2}{3}$; zur dritten 70, giebt $121\frac{2}{3}$.

Wenig ändern sich die Operationen, wenn die ganze Summe unbekannt, und nur ein Theil, nebst der Differenz der übrigen Theile, gegeben ist. Man mißt alsdann nach dem gegebenen Theile die übrigen, deren Differenz, d. h. die Summe, um wie viel sie mehr oder weniger betragen, als der gegebene Theil, bekannt ist. Daraus kann man leicht die andern Zahlen finden, die zusammen die gesuchte Summe ausmachen.

Uebung.

8 sey der gegebene Theil:

ein Theil, welcher eins mehr beträgt, ist 9,
und ein Theil, welcher eins weniger beträgt
als 8, ist 7.

Wenn das Ganze zwei Theile hat, von welchen einer 8, und der andere eins mehr ist, so sind die Theile 8 + 9, und die Summe 17.

Wenn das Ganze drei ungleiche Theile hat, von denen einer eins weniger, und der andere eins mehr als 8 beträgt, so ist der eine gesuchte Theil 7, der andere 9, die ungleichen Theile 8 + 7 + 9, und das Ganze 24.

Wenn einer von drei Theilen eines Ganzen 2 weniger, und der andere 2 mehr als 8 hat, so ist der kleinste Theil 6, der mittlere 8, der dritte 10, und die Summe 6 + 8 + 10, d. i. 24.

Wenn der erste ungleiche Theil einer unbekannten Zahl 8, und der zweite eins weniger, der dritte aber 5 mehr beträgt, als der erste, so sind die Theile 8 + 7 + 13, und die Summe ist 28 u. s. f.

(Man wende dies auf mehrere Fälle an.)

Aufgaben.

70 ist ein Theil eines aus drei ungleichen Theilen bestehenden unbekannten Ganzen. Von diesen Theilen ist der erste 52 mehr, der dritte aber 14 weniger als 70; welches sind die Theile? und wie viel beträgt das Ganze?

Antw. 122 + 70 + 56 sind die Theile, und 248 ist die ganze Summe. Denn 70 ist der be-

kannte Theil; 52 mehr als 70 ist 122, und 14 weniger als 70 ist 56. Daher sind die Theile 122 + 70 + 56; diese betragen 248, welches die gesuchte Summe ist.

Diese Art der Theilung in ungleiche Zahlen ist nicht blos auf zwei oder drei Theile beschränkt, sondern sie läßt sich auf eine beliebige Anzahl von Theilen anwenden. Es ist natürlich, daß der Rest, welcher durch den Abzug der Differenzen entsteht, in eben so viel gleiche Theile zerlegt werden muß, als man ungleiche Theile des Ganzen sucht. Verlangt man z. B. 4 ungleiche Theile zu wissen, so zieht man die dreifache Differenz, welche zwischen diesen vier ungleichen Theilen da ist, von der ganzen Summe ab, und sucht nun den vierten Theil des Restes, welcher der kleinste der gesuchten Theile ist. Nur muß der eine Theil immer zum Maßstabe genommen werden, nach welchem man dann die übrigen Theile mißt.

Uebungen.

6 + 6 + 6 + 6 sind vier gleiche Theile von 24. Wenn ich von der ersten 6 eins nehme, und dies unter die drei übrigen vertheilen will, so wird der erste 5, und ein jeder der drei übrigen Theile $6\frac{1}{3}$. Der Unterschied zwischen dem ersten und einem jeden der drei übrigen Theile ist $1\frac{1}{3}$. Der ganze Unterschied beträgt drei mal so viel, d. i. $3\frac{3}{3}$ oder 4 u. s. f.

$6+6+6+6+6$ sind fünf gleiche Theile von 30. Wenn ich von dem einen 4 wegnehme und unter die übrigen gleich vertheile, so wird dieser Theil 4 weniger als 6, d. i. 2, und ein jeder der andern ist um eins mehr als 6, d. i. 7. Der Unterschied zwischen 2 und 7 ist 5.

[Die Ausführung ist dem Ermessen eines jeden Lehrers überlassen. Allzuweitläufig wird es kaum nöthig seyn, da man im Grunde die vorigen Uebungen, nur anders gewendet, wiederholt.]

Aufgaben.

a) Es sollen 5 ungleiche Zahlen gefunden werden; die erste ist 10 weniger als die zweite, die dritte ist gleich der ersten, die vierte ist gleich der zweiten, und die fünfte 9 mehr als die dritte. Die Summe ist 100; welches sind die gesuchten Zahlen?

Antw. $14\frac{1}{5}+24\frac{1}{5}+14\frac{1}{5}+24\frac{1}{5}+23\frac{1}{5}$. Denn die Differenz zwischen der ersten und zweiten Zahl ist 10, zwischen der ersten und vierten ebenfalls 10, und da die fünfte Zahl 9 mehr ist als die dritte, welche der ersten gleich ist, so ist die Differenz 9. Alle Differenzen zusammen sind $10+10+9=29$; diese von 100, bleiben 71; dieselben in 5 gleiche Theile, ist $14\frac{1}{5}$ ꝛc. Der zweite Theil ist 10 mehr als der erste: $14\frac{1}{5}+10=24\frac{1}{5}$. Der dritte ist dem ersten gleich, also bleibt $14\frac{1}{5}$. Der vierte ist dem zweiten gleich, d. i. $24\frac{1}{5}$. Der fünfte ist 9 mehr als der dritte: $14\frac{1}{5}+9=23\frac{1}{5}$.

Probe:

1. und 2. Theil: $14\frac{1}{5}$ bis $24\frac{1}{5}$, Diff. 10, Summe $38\frac{2}{5}$;
3. und 4. Theil: $14\frac{1}{5}$ bis $24\frac{1}{5}$, Diff. 10, Summe $38\frac{2}{5}$;
5. Theil: $14\frac{1}{5}$ bis $23\frac{1}{5}$, Diff. 9, Summe $23\frac{1}{5}$.

Die Differenzen sind die geforderten, und die Summe beträgt $99 + \frac{5}{5}$, d. i. 100.

b) 50 ist der erste von vier ungleichen Theilen einer Summe. Der zweite Theil ist um 8 mehr, der dritte um 7 weniger, und der vierte 10 mehr als der zweite; welches sind die übrigen Theile? und wie viel beträgt die Summe?

Antw. $50 + 58 + 43 + 68$ die Theile, und 219 die Summe. Denn 50 ist der gegebene Theil. Der zweite ist um 8 mehr: $50 + 8 = 58$. Der dritte um 7 weniger als 50, das sind 43. Der vierte 10 mehr als der zweite; folglich $58 + 10$, das sind 68. Die Theile sind also $50 + 58 + 43 + 68$; die Summe 219.

Es kann aber auch der Fall seyn, daß in einer Reihe von Zahlen nur der Unterschied, welchen eine jede von ihnen mit der nächst vorhergehenden oder nächst folgenden, oder irgend einer andern hat, bekannt, hingegen die Differenz der übrigen unbekannt ist. Dann muß man durch Vergleichung der Differenzen selbst das Uebrige finden. Man geht dann von dem Punkte, wo sich die Zahlen gleich sind, aus, und urtheilt [weil man hier den aliquoten gleichen Theil des Restes nicht zum unmittelbaren Maßstabe wählen kann *)], daß

*) Man wird nämlich im Verlaufe dieser ganzen Reihenfolge von Uebungen bemerkt haben, daß man allezeit den Rest,

der Unterschied zwischen zwei Zahlen gefunden werden müsse, wenn man beide mit einer dritten vergleicht. Man denke sich drei ungleiche Zahlen, deren zweite 3 mehr beträgt als die erste, und deren dritte 4 mehr ist als die zweite. Hier weiß man zwar den Unterschied zwischen der ersten und zweiten, und zwischen dieser und der dritten Zahl; aber die Differenz der ersten und dritten ist noch unbekannt. Diese findet man durch Vergleichung des Bekannten. Man schließt: die zweite ist 3 mehr als die erste; wäre die dritte der zweiten gleich, so müßte sie ebenfalls 3 mehr seyn als die erste; da sie aber noch 4 mehr ist als die zweite, so muß der Unterschied zwischen der ersten und dritten Zahl $3 + 4$, d. i. 7, seyn. Ist der Fall anders, so wird bei diesem Raisonnement jedesmal das Resultat den vorausgeschickten Bedingungen gemäß ausfallen. Es sey z. B. die erste Zahl 12 mehr als die zweite, und die zweite 9 weniger als die dritte, so sieht man leicht, daß hier der Unterschied zwischen der ersten und dritten Zahl sich in eben dem Grade vermindert, als er sich der Zahl 12 annähert. Denn da die erste Zahl

welcher durch den Abzug der Differenzen entsteht, in so viel gleiche Theile theilt, als die gegebene Summe ungleiche Theile haben soll. Ein jeder solcher Theil heißt nun ein aliquoter (irgend ein Theil, dessen Werth unbestimmt ist, sey es $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{9}$ u. s. f.) gleicher Theil des Restes. Dieser muß immer zum Grunde gelegt werden, weil man die übrigen aliquoten gleichen Theile nach ihm zu vergrößern hat. Die Differenz wird dann einem jedem, nach dem Erforderniße der Aufgabe, zugetheilt.

12 mehr ist als die zweite, so muß die zweite Zahl auch 12 weniger seyn als die erste; nun ist aber dieselbe Zahl nur 9 weniger als die dritte, und folglich muß die dritte noch 3 weniger seyn als die erste. Wenn das Verhältniß der ersten und dritten, und dieser mit der zweiten Zahl bekannt wäre, so würde man durch dasselbe Verfahren auch den Unterschied der ersten und zweiten Zahl finden. Es sey die erste Zahl z. B. 8 mehr als die dritte, und diese 3 weniger als die zweite; so leuchtet ein, daß die zweite Zahl 3 mehr seyn müsse als die dritte, und folglich nicht mehr 8, sondern nur 8 — 3, d. i. 5 weniger seyn könne als die erste.

Es sind hier demnach folgende drei Fälle möglich: entweder die dritte oder irgend eine von der angenommenen ersten oder Grundzahl kann gerade um so viel weniger seyn, als die zweite mehr ist. Dann sieht ein jeder, daß sie der ersten wiederum gleich wird, und mithin die Differenz zwischen diesen beiden Zahlen gänzlich schwindet; oder: das minus der ersten Zahl vergrößert mit dem plus der dritten die Differenz, welche zwischen diesen beiden Zahlen Statt findet; oder: das minus *) der dritten Zahl kann das plus der zweiten

*) Das Weniger, d. h. die dritte Zahl kann noch einige Zahlen weniger haben, als die zweite mehr beträgt. Wenn z. B, die zweite 5 mehr beträgt als die erste, und die dritte 8 weniger als die zweite, so übertrifft das minus, d. i. hier die 8, jenes plus (Mehr), d. i. hier die 5, um 3 Einer.

noch übersteigen; dann ist diejenige Anzahl von Einern, welche dasselbe übertreffen, als die Differenz zwischen dieser und der bekannten ersten Zahl anzusehen.

[Man muß, um sich dieses selbst recht zu verdeutlichen, immer Versinnlichungsmittel bei der Hand haben, und auch mit diesen dem Schüler das hier Vorgetragene durchaus ganz zu verdeutlichen suchen. Was hier in der blos wörtlichen Beschreibung schwer scheint, wird ungemein leicht, wenn man es sich veranschaulicht. Man lege also drei Zahlen hin, markire sich dann den Unterschied zwischen zweien neben einander liegenden, und entziffre nun, auf die eben beschriebene Weise, den Unterschied zwischen diesen und einer dritten. Dies wird bei der folgenden Andeutung der hier einschlagenden Uebungen vorausgesetzt.]

Uebungen.

Angenommen 5 + 7 + 9:

5 ist 2 < 7 oder: 7 ist 2 > 5
7 ist 2 < 9 7 ist 2 < 9

5 ist 2 + 2 < 9 9 ist 2 + 2 > 5

oder: 9 ist 2 > 7
7 ist 2 > 5

5 ist 2 + 2 < 9

Die Zahlen seyen anders gestellt; als

7 + 5 + 9:

7 ist 2 > 5 oder: 7 ist 2 < 9
5 ist 4 < 9 9 ist 4 > 5

9 ist 2 > 7 7 ist 2 > 5

Ein anderes Beispiel:

15 + 8 + 12.

a) 15 ist 7 > 8
8 ist 4 < 12

15 ist 7 — 4 > 12

b) 15 ist 3 > 12
12 ist 4 > 8

15 ist 3 + 4 > 8
oder 8 ist 4 + 3 < 15

c) 8 ist 15 — 7
12 ist 15 — 3

8 ist 12 — 4
oder 12 ist 8 + 4

d) 12 ist 8 + 4
15 ist 8 + 7

12 ist 15 — 3
oder 15 ist 12 + 3

Angenommen 5 + 7 + 10:

5 ist 2 < 7, 7 ist 2 > 5, 10 ist 3 > 7.

5 ist die erste Zahl, 7 die zweite, und 10 die dritte. Da die zweite Zahl 2 mehr ist als die erste, und die dritte 3 mehr als die zweite, so ist die dritte 3 + 2 mehr als die erste.

Oder:

Der Unterschied zwischen der ersten und zweiten ist zwei, der Unterschied zwischen dieser und der dritten Zahl ist 3 mehr als 2, oder 5.

Es sey die erste Zahl a, die zweite b, die dritte c:

[Am besten dienen hier die oben erwähnten Zollstücke, anstatt der Buchstaben, zur Versinnlichung. Der Buchstaben darf man sich nur mit großer Vorsicht bedienen, weil sich der Zöling bis zu dem abstrakten Be-

griff der Größe noch nicht wohl erhoben haben kann, und deshalb immer noch die concreten Fälle vor sich sehen muß.]

b 3 > a	b 4 > a	b 5 > a
c 4 > b	c 5 > b	c 7 > b
c 4 + 3 > a	c 4 + 5 > a	c 5 + 7 > a

Man übertrage diese Uebungen also:

Die zweite Zahl ist 3 mehr als die erste, und die dritte 4 mehr als die zweite; folglich ist die dritte Zahl 3 + 4, d. i. 7, mehr als die erste u. s. f.

Oder:

Die zweite Zahl ist 3 mehr als die erste, und 4 weniger als die dritte; folglich ist die dritte 4 mehr als die zweite, und 4 + 3 mehr als die erste.

Dieses steht also:

$$b \begin{cases} 3 > a \\ 4 < c \end{cases}$$

c 4 > b + 3 > a, d. i. 7 > a

$$b \begin{cases} 8 > a \\ 10 < c \end{cases}$$

c 10 > b + 8 > a, d. i. 15 > a

$$b \begin{cases} 12 > a \\ 15 < c \end{cases}$$

c 12 + 15 > a, das ist 27 > a

Oder:

Die erste Zahl ist 3 weniger als die zweite, und diese ist 4 weniger als die dritte; folglich ist die erste Zahl 4 + 3 weniger als die dritte;

lies:

a 4 < b	a 9 < b	a 13 < b
b 3 < c	b 11 < c	b 19 < c
a 4 + 3 < c	a 9 + 11 < c	a 13 + 19 < c

Endlich:

Die erste Zahl ist 4 weniger, und die dritte ist 3 mehr, als die zweite; folglich ist die erste 4 + 3 weniger als die dritte.

Setze also:

a 4 < b	a 14 < b	a 20 < b
c 3 > b	c 13 > b	c 17 > b
a 4 + 3 < c	c 14 + 13 > a	c 20 + 17 > a

Zweiter Fall.

[Die Differenz des ersten und dritten Gliedes wird durch ein Mittelglied aufgehoben.]

Beispiele:

Die zweite Zahl beträgt 7 mehr als die erste, und die dritte weniger als die zweite; folglich beträgt die dritte Zahl um eben so viel weniger als die zweite mehr beträgt, und die dritte Zahl ist der ersten gleich.

7 mehr als 8 ist 15; 7 weniger als 15 ist 8. Oder: 8 ist 7 weniger als 15, und 15 ist 7 mehr als 8; folglich ist 7 + 8 gleich 7 < als 15 u. s. f.

Dritter Fall.

[Das minus übertrifft das plus.]

8 + 13 + 6 sind drei ungleiche Zahlen; die zweite ist 5 mehr als die erste, die dritte ist 7 weniger als die zweite, das ist 6; 6 ist 2 weniger als 8, oder die dritte Zahl ist 2 weniger als die erste.

[Nachdem dies in concreten Fällen veranschaulicht ist, so gebe man dies in abstracten, indem man die zu verbindenden Sätze näher aneinander rückt, und spricht:]

Die erste Zahl ist 5, und die dritte 7 weniger als die zweite; folglich ist die dritte 2 weniger als die erste.

a 5 < b
c 7 < b
---
c 2 < a

[Anders gewendet erscheint dasselbe in folgender Form:]

Die zweite Zahl ist 5 mehr als die erste, und die dritte ist 7 weniger als die zweite; folglich ist die dritte 2 weniger als die erste.

b 5 > a
c 7 < b
---
c 2 > a

Oder:

Oder:

Die zweite Zahl ist 5 mehr als die erste, und 7 mehr als die dritte; folglich muß die dritte noch 2 weniger seyn als die erste.

$$b \begin{cases} 5 > a \\ 7 > c \end{cases}$$

$$c\ 2 < a$$

[Wenn man dieses an drei Zahlen begriffen hat, so wird man mit Leichtigkeit dasselbe auch auf mehrere Zahlen übertragen können.]

Vier Zahlen:

5, 9, 7, 12.

5 ist 4 weniger als 9; 9 ist 2 mehr als 7, und diese ist folglich nur 2 mehr als 5.
7 ist 5 weniger als 12; folglich ist 12 5 + 2 mehr als 5.

Allgemeiner:

Die erste Zahl ist 4 weniger als die zweite; die dritte ist 2 weniger als die zweite, folglich noch 2 mehr als die erste; die vierte ist 5 mehr als die dritte, folglich nur 3 mehr als die zweite, aber 5 + 2 mehr als die erste.

Oder:

Die erste Zahl ist 4 weniger als die zweite, und diese ist zwei mehr als die dritte, welche wiederum 5 weniger ist als die vierte; folglich muß diese um 5 + 2 mehr seyn als die erste, und 5 — 2 (d. i. 3) mehr als die zweite.

Oder auch:

Der Unterschied zwischen der ersten und zweiten Zahl ist 4. Die dritte Zahl ist 2 weniger als die erste; folglich beträgt der Unterschied zwischen der ersten und dritten Zahl 2 weniger als 4, d. i. 2. Die vierte Zahl ist 5 mehr als die dritte, und diese ist 2 mehr als die erste; folglich ist der Unterschied zwischen der dritten und vierten Zahl 2 mehr, als der zwischen der ersten und vierten; zwei mehr als 5 ist 7. Der Unterschied von allen Zahlen ist $4 + 2 + 7$, d. i. 13. Die Summe der gegebenen Zahlen ist 33. Wenn der Unterschied 13 von der Summe abgezogen wird, so entsteht 20 als Rest. Diese in vier gleiche Theile ist $5 + 5 + 5 + 5$. Ist die erste Zahl 4 weniger, so muß die zweite 4 mehr betragen als 5, d. i. 9; die dritte 2 weniger als die zweite: $2 < 9 = 7$; die vierte 5 mehr als die dritte: $5 > 7 = 12$.

Fünf Zahlen.

12, 8, 10, 15, 13.

[Da hier nicht die erste, sondern die zweite Zahl die kleinste ist, so muß auch diese als Maß angenommen werden, nach welchem die Differenz der Theile gemessen wird.]

Der Unterschied zwischen der ersten und zweiten Zahl ist 4; der Unterschied zwischen dieser und der dritten ist 2; die vierte Zahl

ist 5 mehr als die dritte; folglich muß der Unterschied zwischen dieser und der zweiten Zahl 5 + 2 seyn. Die fünfte Zahl ist 2 weniger als die vierte; folglich muß der Unterschied zwischen dieser 2 weniger seyn als 7, d. i. 5. Die Summe der Differenzen ist folglich 4 + 2 + 7 + 5 = 18. Wenn ich diese von dem gegebenen Ganzen, das sind 58, wegnehme, so bleibt 40. Davon ist 8 der fünfte und kleinste der gegebenen Theile, nach welchem die übrigen gemessen werden.

Aufgaben.

1) Drei ungleiche Zahlen: die erste ist 6 weniger als die zweite, und diese ist 8 mehr als die dritte, welches wird der Unterschied zwischen der ersten und dritten seyn?

Antw. Die erste ist 2 mehr als die dritte. Denn da die zweite 8 mehr ist als die dritte, so muß diese 8 weniger seyn als die zweite; die erste ist aber nur 6 weniger, folglich muß sie noch 2 mehr seyn als die dritte.

2) Wenn von drei gegebenen Zahlen die dritte 5 mehr ist als die erste, und diese 10 weniger als die zweite, welches ist dann der Unterschied zwischen der zweiten und dritten Zahl?

Antw. 5. Denn die zweite Zahl ist 10, die dritte aber nur 5 mehr als die erste; folglich beträgt der Unterschied zwischen der zweiten und dritten Zahl 5.

3) 50 ist die dritte von drei ungleichen Zahlen. Wie viel beträgt die erste, wenn die zweite 15

mehr als die dritte, und 20 weniger als die erste ist?

Antw. 85. Denn da die zweite Zahl 20 weniger als die erste beträgt, so muß diese 20 mehr seyn. Nun ist aber die zweite schon 15 mehr als die dritte; folglich muß die erste 15 + 20 mehr seyn als 50, d. i. 85.

4) Drei ungleiche Zahlen. Die erste ist 27 weniger als die zweite, und die dritte ist 36 mehr als die erste; welches ist der Unterschied zwischen der zweiten und dritten Zahl?

Auflösung: Da die erste 27 weniger ist als die zweite, so muß die zweite die erste noch um 27 übertreffen. Die dritte übertrifft die erste um 36, d. i. also noch 9 mehr als die zweite; und diese 9 ist der Unterschied, welcher zwischen der zweiten und dritten Zahl Statt findet.

[Betrüge die erste Zahl 80, so müßte man diesem gemäß der zweiten noch 27, und der dritten 36 mehr zutheilen (80 + 107 + 116); gehörten diese 80 aber der zweiten Zahl, so müßte man ihr noch die 27 entziehen, damit sie, der Forderung gemäß, die erste Zahl darstelle; und noch 9 geben, um die dritte Zahl zu erreichen (also: 53 + 80 + 89). Wäre 80 die dritte Zahl, so müßte die zweite um 9, die erste hingegen um 36 vermindert werden (also: 44 + 71 + 80)].

5) Drei ungleiche Zahlen. Die erste ist 9 weniger als die zweite, und die dritte ist 15 mehr als die zweite. Die Summe ist 99. Wie viel beträgt eine jede der gesuchten Zahlen?

Antw. 22 + 31 + 46. Denn die erste Zahl ist 9 weniger als die zweite; die dritte ist 15 mehr als die zweite, folglich 15 + 9 mehr als die erste. Die Differenz der Theile ist also 9 + 24, d. i. 33. Die Summe ist 99; von dieser die Differenz der Theile, bleibt 66; diese in drei

gleiche Theile, giebt 22 + 22 + 22. Die zweite bekommt 9 mehr, ist folglich 31. Die dritte bekommt 24 mehr, und ist folglich 46.

Probe: 22 und 31 hat zur Differenz 9; die Summe ist 53; zwischen 31 und 46 ist 15 die Differenz; kommt diese 46 zu 53, so entsteht 99, als die gegebene Summe.

6) 100 soll in drei ungleiche Theile zerlegt werden. Der erste derselben ist 19 weniger als der zweite, und dieser ist 20 mehr als der dritte; welches sind die Theile?

Antw. $27\frac{1}{3} + 46\frac{1}{3} + 26\frac{1}{3}$. Denn der erste Theil ist 19 kleiner als der zweite, und dieser ist 20 mehr als der dritte; folglich muß der dritte noch eins weniger seyn als der erste. Der Unterschied zwischen der ersten und zweiten Zahl ist 19; der Unterschied zwischen dieser und der dritten ist 20. Die dritte Zahl ist also eins weniger als die erste. Zwischen der ersten und dritten ist also nur eins, und zwischen dieser und der zweiten eins mehr als 19, d. i. 20, der Unterschied; dies mit der obigen eins, giebt 21, als die ganze Differenz; diese von 100, bleibt 79; in drei gleiche Theile, ist $26\frac{1}{3} + 26\frac{1}{3} + 26\frac{1}{3}$. Die dritte ist die kleinste Zahl, also $26\frac{1}{3}$. Die erste ist eins mehr, also $27\frac{1}{3}$. Die zweite ist 19 mehr als die erste, oder 20 mehr als die dritte, d. i. $46\frac{1}{3}$.

Probe: Zwischen $27\frac{1}{3}$ und $46\frac{1}{3}$ ist die Differenz 19; zwischen dieser Zahl und $26\frac{1}{3}$ ist sie 20. Die Summe von allen drei Zahlen ist 100.

7) Es sollen drei ungleiche Zahlen gefunden werden. Die erste ist 49 mehr als die zweite, und diese ist 12 mehr als die dritte; welches sind die Zahlen, wenn ihre Summe 150 beträgt.

Antw. $86\frac{2}{3} + 37\frac{2}{3} + 25\frac{2}{3}$. Denn drei Zahlen sind gegeben, welche 150 machen. Die erste beträgt mehr als die zweite, und diese hinwiederum mehr als die dritte; folglich muß die dritte das Wenigste betragen. Die Differenz zwischen der dritten und zweiten Zahl ist 12; zwischen der zweiten und ersten 49; zwischen der dritten und ersten folglich 49 + 12, d. i. 61; dazu noch 12, als die Differenz der zweiten und dritten Zahl, ist 73; diese von der Summe 150, bleibt 77 als Rest, von welchem der dritte Theil $25\frac{2}{3}$ ist; dies ist die kleinste, hier also die dritte der gesuchten Zahlen. Die zweite ist 12 mehr, d. i. $37\frac{2}{3}$. Die erste ist 49 mehr als die zweite, d. i. $86\frac{2}{3}$.

Mit vier Zahlen:

8) 30 ist einer von vier ungleichen Theilen eines Ganzen. Von diesen ist der zweite 15 mehr als der erste; der dritte ist 19 weniger als der zweite; der vierte ist gleich der Differenz der eben genannten Zahlen; welches sind die Theile, und wie viel beträgt ihr Inhalt?

Antw. 30 + 45 + 26 + 23 sind die Theile, und 124 das Ganze. Denn $15 > 30 = 45$; $19 < 45 = 26$. Die Differenz der drei genannten Zahlen ist 23 (denn von 26 bis 30 ist 4, und bis 45 19). Der Inhalt der vierten Zahl ist folglich 23; 30 + 45 + 26 + 23 sind 124.

9) Vier ungleiche Zahlen betragen 200. Die erste ist 20 mehr; die dritte 18 weniger, und die vierte 21 mehr als die erste; welches sind die Zahlen?

Aufl. Da die erste Zahl 20 mehr, und die dritte nur 18 weniger, die vierte aber noch 21 mehr

als die erste beträgt, so ist die zweite Zahl die kleinste (hier also der vierte gleiche Theil des zu suchenden Restes); diese ist um 20 weniger als die erste; folglich um 21 + 20, d. i. 41, weniger als die vierte, und um zwei weniger als die dritte. Der Inhalt der Differenzen ist 20 + 41 + 2, d. i. 63; diese von 200, bleiben 137. Der vierte Theil (d. i. der kleinste der gesuchten ungleichen Theile) davon ist $34\frac{1}{4}$; dies ist also die zweite Zahl. Die erste ist 20 mehr, d. i. $54\frac{1}{4}$; zur dritten 2, d. i. $36\frac{1}{4}$; zur vierten 41, d. ist $75\frac{1}{4}$.

Oder auch:

a, b, c, d seyen die gegebenen unbekannten Zahlen.

a ist 20 > b, Differ. 20;
c ist 18 < a, Differ. 20 — 18;
d ist 21 > a, Differ. 20 + 21;

---

so ist a > b 20;
b < c 2;
c < a 20 + 21.

a, b, c, d = 200 — Diff. 63 = 137;

b = $\frac{1}{4}$ v. 137, d. i. $34\frac{1}{4}$;
a = 20 > b, d. i. $34\frac{1}{4}$ + 20;
c = 18 < a, d. i. $34\frac{1}{4}$ + 20 — 18;
d = 21 > a, d. i. $34\frac{1}{4}$ + 20 + 21;

---

also: a $54\frac{1}{4}$, b $34\frac{1}{4}$, c $36\frac{1}{4}$, d $75\frac{1}{4}$.

[Durch solche und ähnliche Vorübungen wird die Buchstabenrechnung am besten vorbereitet. Die Buchstaben stellen in der Arithmetik die Zahlen im Abstracten dar; sie sind nur die Rectionspunkte für den äußern Sinn, der bei Allem eines Objectes bedarf, an das er sich hält, um sich nicht zu verwirren. Nie muß man daher etwas durch Buchstaben deutlich machen oder beweisen wollen, was dem Elementar-Schüler nicht zuvor durch

ein angemessenes und durchgreifendes Raisonnement begreiflich gemacht worden ist.]

10) Vier ungleiche Zahlen. Die erste beträgt 24 weniger als die zweite; die dritte 13 mehr als die vierte, und diese 27 weniger als die zweite; ihre Summe ist 190; welches sind die Zahlen?

Antw. Da die erste 24 weniger ist als die zweite, so ist diese 24 mehr als die erste. Da die dritte 13 weniger ist als die vierte, so ist diese 13 mehr als die dritte. Die vierte ist aber 27 weniger als die zweite, und da diese 24 mehr ist als die erste, so ist sie auch noch 3 weniger als die erste. Diese ist also die kleinste Zahl. Die erste ist 3, die zweite 24 + 3, d. i. 27; die dritte 13 mehr; die Summe der Differenzen ist demnach 43; diese von 190, bleibt 147; davon ist der vierte oder kleinste der ungleichen Theile $36\frac{3}{4}$. Die erste Zahl ist 3 mehr, d. i. $39\frac{3}{4}$. Die zweite ist $36\frac{3}{4}$ + 27, d. i. $63\frac{3}{4}$. Die dritte ist $36\frac{3}{4}$ + 13, d. i. $49\frac{3}{4}$.

Probe: Die erste dieser Zahlen ist $39\frac{3}{4}$, und diese ist 24 weniger als $63\frac{3}{4}$ oder die zweite Zahl. Die dritte Zahl ist $49\frac{3}{4}$ und 13 mehr als die vierte, welche $36\frac{3}{4}$ beträgt; 39 + 63 + 49 + 36 = 137; vier mal $\frac{3}{4}$ sind $\frac{12}{4}$, das sind 3 Ganze; dies zu 187 = 190.

11) 300 soll in vier ungleiche Zahlen getheilt werden. Die erste ist 20 mehr als die dritte; die zweite ist 30 weniger als die vierte, und 40 weniger als die erste.

Auflösung: Da die erste Zahl 20 mehr ist als die dritte, die zweite aber 40 weniger als die erste, folglich noch 20 weniger als die dritte, und 30 weniger als die vierte ist, so ist die

zweite Zahl die kleinste. Die Differenzen sind also 40 + 20 + 30 = 90; diese von der Potenz abgezogen, bleibt 210. Davon ist der vierte und kleinste Theil 52½; dies ist also die zweite Zahl. Die erste ist 40 mehr, also 92½; die dritte ist 20 mehr, also 72½; die vierte ist 30 mehr, also 82½.

Oder:

a = 20 > c;
b = 30 < d + 40 < a;

---

a 40 > b + 20 > c; also: c 20 > b, d 30 > b;

folglich ist nun a = b + 40; c = b + 20; d = b + 30.

a, b, c, d = 300; Diff. 40 + 20 + 30 = 90 — 300; Rest 210; b = ¼ von 210; d. i. 52½.

a = 52½ + 40, d. i. 92½;
b = 52½;
c = 52½ + 20, d. i. 72½;
d = 52½ + 30, d. i. 82½;

Differ. 90; S. 300.

12) Fünf ungleiche Zahlen betragen 400. Die erste ist 12 weniger als die zweite, und diese ist 20 mehr als die dritte. Die vierte ist 30 weniger als die fünfte, und diese ist 50 mehr als die erste.

Auflösung: Da die erste Zahl 12 weniger ist als die zweite, und diese 20 mehr beträgt als die dritte, so ist die dritte Zahl nicht nur um 20 weniger als die zweite, sondern auch noch um 8 weniger als die erste (denn diese ist 12 weniger als die zweite). Die vierte ist 30 weniger als die fünfte, und da diese 50 mehr ist als die erste, so muß die vierte seyn 50 — 30,

d. i. 20; die erste ist aber wiederum 8 mehr als die dritte; folglich ist die dritte 58 weniger als die fünfte, und 28 weniger als die vierte, und die kleinste der fünf ungleichen Zahlen von 400. Da nun der kleinste Theil gleich seyn muß dem fünften Theile des Restes, welcher durch den Abzug der Differenzen entsteht; so muß zuerst dieser Rest, und dann der fünfte Theil desselben gesucht werden. Die Differenzen sind aber $8 + 20 + 28 + 58 = 114$; $400 - 114 = 286$. Der fünfte Theil davon ist $57\frac{1}{5}$; dieses ist also die Summe des dritten oder kleinsten Theiles jener ungleichen Theile von 400.

Die erste Zahl ist nun	$57\frac{1}{5}$	$+ 8$	$=$	$65\frac{1}{5}$;
die zweite	$57\frac{1}{5}$		$=$	$57\frac{1}{5}$;
die dritte	$57\frac{1}{5}$	$+ 20$	$=$	$77\frac{1}{5}$;
die vierte	$57\frac{1}{5}$	$+ 28$	$=$	$85\frac{1}{5}$;
die fünfte	$57\frac{1}{5}$	$+ 58$	$=$	$115\frac{1}{5}$;

Diff. 114, S. 400.

Oder:

$a, b, c, d, e = 400;$

$a = 12 < b;$

$b = 20 > c;$

$c = 8 < a + 28 > b;$

$d = 30 < e;$

$e = 50 > a;$

$d = 20 > a.$

Da nun

$a\ 8 > c,$

---

so ist d 20 + 8 und e 50 + 8 > c.

Die Differenz sey m:

so ist a, b, c, d, e — m gleich 400 — 114

oder 286.

Dies Fünftel sey i, d. i. $57\frac{1}{5}$,

so ist a $= 57\frac{1}{5} + 8$;

b $= 57\frac{1}{5}$;

c $= 57\frac{1}{5} + 20$;

d $= 57\frac{1}{5} + 28$;

e $= 57\frac{1}{5} + 58$;

13) Von fünf unbekannten Zahlen beträgt die dritte 80. Die erste ist 20 weniger als die zweite, und diese beträgt 50 mehr als die fünfte, welche 12 weniger als die vierte ist. Die vierte endlich ist 5 mehr als die dritte. Welches sind die unbekannten Zahlen und ihre Summe?

Auflösung: Da die dritte Zahl bekannt ist, so muß diejenige Zahl, welche mit ihr verglichen wird, zunächst beachtet werden. Diese Zahl ist hier die vierte, welche 5 mehr beträgt als die dritte, und folglich 85 seyn muß. Die fünfte ist 12 weniger als die vierte, folglich 73. Die zweite ist wiederum 50 mehr als die fünfte, d. i. 123, und die erste ist endlich 20 weniger als die zweite, folglich 103. Die Zahlen sind also der Reihe nach 103, 123, 80, 85, 73 = 464.

§. 18.

Alle bisherigen Uebungen setzten eine Beziehung der Theile auf ihr respectives Ganze voraus. Wir sahen aber schon oben, daß der Begriff eines Ganzen nur ein Verhältnißbegriff sey, der nichts weiter bedeute, als

die arithmetische Vollständigkeit der Theile *). Da nun diese an keine Zahl nothwendig gebunden ist, so kann es auch eben so wenig der Begriff eines Ganzen seyn. Man kann daher auch jede arithmetische Vollständigkeit für die andere setzen, ohne daß sich dabei der Werth im Ganzen nur im mindesten ändert. Wohl aber ändert sich das Verhältniß und der Werth der Theile, in so fern sie in Beziehung auf das Ganze aufgefaßt werden. So ist $\frac{1}{15}$ an sich eben so viel als $\frac{3}{5}$. Aber $\frac{1}{15}$ ist deshalb nicht gleich einem Drittel, weil dieses nur eine dreimalige, jenes aber eine funfzehnmalige Wiederholung erfordert, um den Begriff eines Ganzen zu vollenden. Nichts desto weniger kann eine Anzahl von verhältnißmäßig kleinern Theilen gleich werden einem größern Theile, so bald man nur den Punkt sucht, von welchem aus die Anzahl der gegebenen Theile ebenfalls gerade so viel mal wiederholt werden mußte, als der größere Theil. So kann, um bei dem vorigen Beispiele zu bleiben, eine Anzahl von Funfzehnteln dem dritten Theile gleich gemacht werden, wenn man darauf achtet, wie viel Funfzehntheile dreimal wiederholt werden müssen, um $\frac{1}{15}$ auszumachen; dies ergiebt sich, so bald man auf obige Weise nur den dritten Theil von 15 sucht; dieser ist 5; $\frac{5}{15}$ ist also

*) Darunter hat man sich den Inbegriff aller derjenigen Theile zu denken, von denen ein jeder einzelne den Namen führt; z. B. $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{1}\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}\frac{2}{2}$ u. s. f. sind arithmetische Vollständigkeiten; so bald aber ein einziges Glied fehlt, so ist diese Vollständigkeit aufgehoben.

gleich dem dritten Theile, denn drei mal $\frac{5}{15}$ ist gleich $\frac{15}{15}$ oder einem Ganzen. Dasselbe gilt von allen übrigen Zahlen und Verhältnissen. Es muß daher auch diese Relation der kleinern und größern Theile beachtet werden, damit man dann auch mit Leichtigkeit eine Anzahl kleinerer Theile in größere umsetzen könne.

Uebung.

$2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$ oder ein Ganzes.

$2 \times \frac{2}{4} = \frac{4}{4}$, od. $\frac{2}{4}$ ist $\frac{1}{2}$ v. $\frac{4}{4}$ od. einem Ganzen.

$2 \times \frac{3}{6} = \frac{6}{6}$, od. $\frac{3}{6}$ ist $\frac{1}{2}$ v. $\frac{6}{6}$ . . . . .

$2 \times \frac{4}{8} = \frac{8}{8}$, od. $\frac{4}{8}$ ist $\frac{1}{2}$ v. $\frac{8}{8}$ . . . . .

$2 \times \frac{5}{10} = \frac{10}{10}$, od. $\frac{5}{10}$ ist $\frac{1}{2}$ v. $\frac{10}{10}$ . . . . .

$2 \times \frac{6}{12} = \frac{12}{12}$, od. $\frac{6}{12}$ ist $\frac{1}{2}$ v. $\frac{12}{12}$ . . . . .

u. s. f.

[Man setzt diese Uebung fort so lange es nöthig ist. Jeder muß sich hierin nach seinen Lokalbedürfnissen richten. Es ist nicht nöthig, daß er bis 100 oder noch weiter Zahl vor Zahl durchgehe; etwas muß allezeit der Imagination des Schülers überlassen bleiben. Wenn das Einfache begriffen ist, so kann es ja gleich der Lehrer mit höhern Zahlen versuchen; z. B. $2 \times \frac{20}{40} = \frac{40}{40}$, oder $\frac{20}{40}$ sind $\frac{1}{2}$ von $\frac{40}{40}$ oder einem Ganzen u. s. f.]

Umgekehrt:

$\frac{1}{2}$ hat

$\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{7}{14}$ u. s. f.

Drittel:

$3 \times 1 = 3$;

$3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$ oder ein Ganzes.

$3 \times 2 = 6$:

$3 \times \frac{2}{6} = \frac{6}{6}$; $\frac{2}{6}$ ist $\frac{1}{3}$ von $\frac{6}{6}$ oder einem Ganzen.

$3 \times 3 = 9$:

$3 \times \frac{3}{9} = \frac{9}{9}$; $\frac{3}{9}$ ist $\frac{1}{3}$ von $\frac{9}{9}$ oder einem Ganzen.

$3 \times 4 = 12$:

$3 \times \frac{4}{12} = \frac{12}{12}$; $\frac{4}{12}$ sind $\frac{1}{3}$ v. $\frac{12}{12}$ od. einem Ganzen.

$3 \times 5 = 15$:

$3 \times \frac{5}{15} = \frac{15}{15}$; $\frac{5}{15}$ sind $\frac{1}{3}$ v. $\frac{15}{15}$ od. einem Ganzen,

u. s. f.

Umgekehrt:

$\frac{1}{3}$ hat

$\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{15}$ u. s. f.

Viertel:

$4 \times 1 = 4$:

Ein Ganzes hat $\frac{4}{4}$; $\frac{1}{4}$ ist der vierte Theil von $\frac{4}{4}$.

$4 \times 2 = 8$:

$1 \times \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ von $4 \times \frac{2}{8}$, d. i. $\frac{8}{8}$ od. ein Ganzes.

$4 \times 3 = 12$:

$4 \times \frac{3}{12} = \frac{12}{12}$; $\frac{7}{12}$ ist $\frac{1}{4}$ v. $\frac{12}{12}$ od. einem Ganzen.

$4 \times 4 = 16$:

$4 \times \frac{4}{16} = \frac{16}{16}$; $\frac{4}{16}$ ist $\frac{1}{4}$ v. $\frac{16}{16}$ od. einem Ganzen,

u. s. f.

Umgekehrt:

$\frac{1}{4}$ hat

$\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{16}$ u. s. w.

Fünftel:

Ein Ganzes hat $\frac{5}{5}$.

$5 \times \frac{1}{5} = 5$:

$1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ von $5 \times \frac{1}{5}$ oder einem Ganzen.

$5 \times 2 = 10$:

$5 \times \frac{2}{10} = \frac{10}{10}$; $\frac{2}{10}$ ist $\frac{1}{5}$ v. $\frac{10}{10}$ od. einem Ganzen.

$5 \times 3 = 15$:

$5 \times \frac{3}{15} = \frac{15}{15}$; $\frac{3}{15}$ ist $\frac{1}{5}$ v. $\frac{15}{15}$ od. einem Ganzen.

$5 \times 4 = 20$:

$5 \times \frac{4}{20} = \frac{20}{20}$; $\frac{4}{20}$ ist $\frac{1}{5}$ v. $\frac{20}{20}$ od. einem Ganzen.

$5 \times 5 = 25$:

$5 \times \frac{5}{25} = \frac{25}{25}$; $\frac{5}{25}$ ist $\frac{1}{5}$ v. $\frac{25}{25}$ od. einem Ganzen,

u. s. f.

Umgekehrt:

$\frac{1}{5}$ hat

$\frac{2}{10}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{5}{25}$ u. s. f.

Sechstel:

Ein Ganzes hat $\frac{6}{6}$.

$6 \times 1 = 6$:

$\frac{1}{6}$ ist der sechste Theil v. $6 \times \frac{1}{6}$ od. einem Ganzen.

$6 \times 2 = 12$:

$6 \times \frac{2}{12} = \frac{12}{12}$; $\frac{2}{12}$ ist $\frac{1}{6}$ v. $\frac{12}{12}$ od. einem Ganzen.

$6 \times 3 = 18$:

$6 \times \frac{3}{18} = \frac{18}{18}$; $\frac{3}{18}$ sind $\frac{1}{6}$ des Ganzen.

$6 \times 4 = 24$:

$6 \times \frac{4}{24} = \frac{24}{24}$; $\frac{4}{24}$ sind $\frac{1}{6}$ des Ganzen, u. s. f.

Umgekehrt:

$\frac{1}{6}$ hat

$\frac{2}{12}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{5}{30}$, $\frac{6}{36}$ u. s. f.

Siebentel:

$7 \times 1 = 7$:

$\frac{1}{7}$ ist der siebente Theil von $\frac{7}{7}$ oder einem Ganzen.

$7 \times 2 = 14$:

$7 \times \frac{2}{14} = \frac{14}{14}$; $\frac{2}{14}$ ist $\frac{1}{7}$ v. $\frac{14}{14}$ od. einem Ganzen.
$7 \times \frac{3}{21} = \frac{21}{21}$; $\frac{3}{21}$ ist $\frac{1}{7}$ des Ganzen.
$7 \times \frac{4}{28} = \frac{28}{28}$; $\frac{4}{28}$ ist $\frac{1}{7}$ . . .
$7 \times \frac{5}{35} = \frac{35}{35}$; $\frac{5}{35}$ ist $\frac{1}{7}$ . . .

Umgekehrt:

$\frac{1}{7}$ hat

$\frac{2}{14}$, $\frac{3}{21}$, $\frac{4}{28}$, $\frac{5}{35}$, $\frac{6}{42}$, $\frac{7}{49}$.

Achtel:

$\frac{1}{8}$ ist der achte Theil von $\frac{8}{8}$.

$8 \times \frac{2}{16} = \frac{16}{16}$; $\frac{1}{8}$ hat $\frac{2}{16}$;
$8 \times \frac{3}{24} = \frac{24}{24}$; $\frac{1}{8}$ hat $\frac{3}{24}$.
$8 \times \frac{4}{32} = \frac{32}{32}$; $\frac{1}{8}$ hat $\frac{4}{32}$.
$8 \times \frac{5}{40} = \frac{40}{40}$; $\frac{1}{8}$ hat $\frac{5}{40}$.
$8 \times \frac{6}{48} = \frac{48}{48}$; $\frac{1}{8}$ hat $\frac{6}{48}$.
$8 \times \frac{7}{56} = \frac{56}{56}$; $\frac{1}{8}$ hat $\frac{7}{56}$.
$8 \times \frac{8}{64} = \frac{64}{64}$; $\frac{1}{8}$ hat $\frac{8}{64}$.

[Man

[Man sieht wohl, daß die Uebungen hier abgekürzt sind. Nach Befinden der Umstände, und den Fortschritten der Zöglinge, muß es sich richten, wie bald der Lehrer dasselbe auch in der praktischen Ausübung versuchen kann.]

Dieselbe Uebung läßt sich, wie es schon von selbst einleuchtet, auch auf andere Zahlen und Theile des Ganzen übertragen. Da aber die Behandlung nicht im mindesten von den gegebenen Beispielen abweicht, so bedarf es hier keiner größern Ausführlichkeit. Auch wird ein jeder Lehrer finden, daß der Schüler in größern Zahlen sehr leicht einsieht, was ihm in kleinern klar ist.

Aufgaben.

a) Ein Halb, wie viel Zwölftel?

Antw. $\frac{6}{12}$. Denn ein Ganzes hat $\frac{12}{12}$, das sind $2 \times \frac{6}{12}$; $1 \times \frac{6}{12}$ ist ein Halb von $2 \times \frac{6}{12}$ oder einem Ganzen.

b) Drei Sechstel, den wievielsten Theil des Ganzen betragen sie?

Antw. Die Hälfte. Denn ein Ganzes hat sechs Sechstel; $\frac{6}{6}$ sind $2 \times \frac{3}{6}$; $1 \times \frac{3}{6}$ ist $\frac{1}{2}$ von $2 \times \frac{3}{6}$ oder einem Ganzen.

c) Wie viel Sechstel gehören zu einem Drittel?

Antw. 2. Denn $\frac{6}{6}$ sind $3 \times \frac{2}{6}$; $1 \times \frac{2}{6}$ ist der dritte Theil von $3 \times \frac{2}{6}$ oder dem Ganzen.

d) Fünf Zwanzigstel, den wievielsten Theil des Ganzen betragen sie?

Antw. Den vierten. Denn $\frac{20}{20}$ ist ein Ganzes; $\frac{20}{20}$ sind $4 \times \frac{5}{20}$; ein mal $\frac{5}{20}$ ist von $4 \times \frac{5}{20}$ ein Viertel.

e) Ein Siebentel, wie viel sind es 28stel und wie viel 42stel?

Antw. $\frac{4}{28}$ und $\frac{6}{42}$. Denn $\frac{28}{28}$ sind $\frac{7}{7}$; $\frac{42}{42}$ sind ebenfalls $\frac{7}{7}$; $\frac{7}{7}$ sind $7 \times \frac{4}{28}$ und $7 \times \frac{6}{42}$; $1 \times \frac{4}{28}$ ist der siebente Theil von $7 \times \frac{4}{28}$, und $1 \times \frac{6}{42}$ ist der siebente Theil von $7 \times \frac{6}{42}$.

§. 19.

Vorbereitung.

[Hier zeigt sich ein Ruhepunkt für die abstracte Behandlung der Zahl. Es bedarf nur noch weniger Schritte, um bis zur höchsten Abstraction sich zu erheben. Damit aber der Zögling nicht schwindele, so verstatte man ihm hier eine Umsicht; man mache es ihm fühlbar, was er durch seine Abstractionen gewonnen. Er muß das, was er bisher immer im Verhältniß der Theile zu ihrem Ganzen anschaute, auch lernen auf concrete Fälle übertragen. Denn eine jede Zahl ist nur so lange absolut, oder selbstständig, als neben ihr keine andere besteht. Es bedarf nur einer Zusammenstellung derselben mit einer andern, so kommt sie gleich in Relation.]

Wie aus dem Ganzen die Theile gefunden werden, ist nun in concreten Fällen, so wie in abstracten, begriffen. Aber etwas anders wird die Uebung seyn, aus den gegebenen Theilen eines imaginären (eingebildeten, unbestimmt vorgestellten) Ganzen das letztere selbst zu finden, und in der Wirklichkeit, d. i. im Concreto, darzustellen. Da durch die Benennung der Theile der zu einem Ganzen erforderliche Numerus bekannt ist, so darf man nur wissen, wie viel mal einer oder mehrere gegebene Theile wiederholt werden müssen, um den richtigen Numerus aller Theile zu empfangen. Wäre z. B. $\frac{1}{5}$ gegeben, so sieht man sogleich, daß die fünfmalige Wiederholung dieses Theils den Numerus der Theile, oder $\frac{5}{5}$, das ist, ein

Ganzes, giebt. Wären aber $\frac{3}{5}$ gegeben, so würde man diese $\frac{2}{5}$ nur ein und ein halb mal wiederholen dürfen, um $\frac{5}{5}$ zu erlangen; denn $2 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ ist $\frac{5}{5}$ oder ein Ganzes. Wären $\frac{3}{5}$ gegeben, so würde man sogleich sehen, daß bis zu $\frac{5}{5}$ noch 2 fehlen. Diese beiden sind freilich 5tel, so bald sie mit $\frac{5}{5}$ in Beziehung gesetzt werden; da aber nur $\frac{3}{5}$ vorhanden sind, und aus der Wiederholung dieser erst die $\frac{5}{5}$ entstehen sollen, so erhellt, daß zu den $\frac{5}{5}$ zwei solcher Theile fehlen, als man deren drei vor sich hat; $\frac{2}{5}$ sind aber von drei Fünfteln $\frac{2}{3}$. Sind $\frac{4}{5}$ gegeben, so fehlt noch ein Fünftel des Ganzen; das ist aber ein solcher Theil, als deren vier vorhanden sind, oder der vierte Theil von $\frac{4}{5}$. Was von diesem Beispiele gilt, das gilt auch von allen andern. Es müssen allezeit die zu einem Ganzen noch fehlenden Theile mit den vorhandenen verglichen, und nach diesen gemessen werden. Man denke nun, daß irgend eine gegebene Zahl ein aliquoter Theil einer andern sey, so muß dieser natürlich so oft wiederholt werden, bis der zu einem Ganzen erforderliche Numerus von Theilen vollendet ist. Es sey z. B. 9 der fünfte Theil eines Ganzen, so wird man diese 9 fünf mal wiederholen müssen, um das Ganze zu erhalten. Wäre 9 aber $\frac{2}{5}$, so würde sie nur zwei und ein halb mal wiederholt werden müssen, um den Betrag des Ganzen zu geben. Im ersten Falle wäre 45, im zweiten $2 + \frac{1}{2} \times 9$, d. i. $22\frac{1}{2}$, das Ganze.

Erste Uebung.

$\frac{3}{3}$ ist

$3 \times \frac{1}{3}$, $1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$.

$\frac{4}{4}$ ist

$4 \times \frac{1}{4}$, $2 \times \frac{2}{4}$, $1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$.

$\frac{5}{5}$ ist

$5 \times \frac{1}{5}$, $2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$, $1 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$, $1 + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5}$.

$\frac{6}{6}$ ist

$6 \times \frac{1}{6}$, $3 \times \frac{2}{6}$, $2 \times \frac{3}{6}$, $1 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{6}$, $1 + \frac{1}{5} \times \frac{5}{6}$.

$\frac{7}{7}$ ist

$7 \times \frac{1}{7}$, $3 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7}$, $2 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{7}$, $1 + \frac{3}{4} \times \frac{4}{7}$,
$1 + \frac{2}{5} \times \frac{5}{7}$, $1 + \frac{1}{6} \times \frac{6}{7}$ u. s. f.

Zweite Uebung.

12 ist

$\frac{1}{3}$ von 3×12, d. i. 36.
$\frac{2}{3}$ von $1 + \frac{1}{2} \times 12$, d. i. 18.

12 ist

$\frac{1}{4}$ von 4×12, d. i. 48.
$\frac{2}{4}$ von 2×12, d. i. 24.
$\frac{3}{4}$ von $1 + \frac{1}{3} \times 12$, d. i. $12 + 4$ oder 16.

12 ist

$\frac{1}{5}$ von 5×12, d. i. 60.
$\frac{2}{5}$ von $2 + \frac{1}{2} \times 12$, d. i. 30.
$\frac{3}{5}$ von $1 + \frac{2}{3} \times 12$, d. i. $12 + 2 \times 4$ od. 20.
$\frac{4}{5}$ von $1 + \frac{1}{4} \times 12$, d. i. $12 + 3$ oder 15.

12 iſt

$\frac{1}{6}$ von $6 \times 12 = 72$.
$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ wie oben.
$\frac{5}{6}$ von $1 + \frac{1}{5} \times 12$, d. i. $12 + 2\frac{2}{5} = 14\frac{2}{5}$.

12 iſt

$\frac{1}{7}$ von $7 \times 12 = 84$.
$\frac{2}{7}$ von $3 + \frac{1}{2} \times 12 = 36 + 6 = 42$.
$\frac{3}{7}$ von $2 + \frac{1}{3} \times 12 = 24 + 4 = 28$.
$\frac{4}{7}$ von $1 + \frac{3}{4} \times 12 = 12 + 3 \times 3 = 21$.
$\frac{5}{7}$ von $1 + \frac{2}{5} \times 12 = 12 + 2 \times 2\frac{2}{5} = 16\frac{4}{5}$.
$\frac{6}{7}$ von $1 + \frac{1}{6} \times 12 = 12 + 1 \times 2 = 14$.

12 iſt

$\frac{1}{8}$ von $8 \times 12 = 96$.
$\frac{2}{8}$ von $4 \times 12 = 48$.
$\frac{3}{8}$ von $2 + \frac{2}{3} \times 12$, d. i. $24 + 2 \times 4 = 32$.
$\frac{4}{8}$, d. i. $\frac{1}{2}$, von $2 \times 12 = 24$.
$\frac{5}{8}$ von $1 + \frac{3}{5} \times 12$, d. i. $2 + 3 \times 2\frac{2}{5} = 6\frac{6}{5}$,
d. i. $7\frac{1}{5}$ zu 12 iſt $19\frac{1}{5}$.
$\frac{6}{8}$, od. $\frac{3}{4}$, v. $1 + \frac{1}{3} \times 12$, d. i. $12 + 4 = 16$.
$\frac{7}{8}$ von $1 + \frac{1}{7} \times 12$, d. i. $12 + 1\frac{5}{7} = 13\frac{5}{7}$.

12 iſt

$\frac{1}{9}$ von $9 \times 12 = 108$.
$\frac{2}{9}$ von $4 + \frac{1}{2} \times 12$, d. i. $48 + 6 = 54$.
$\frac{3}{9}$, d. i. $\frac{1}{3}$, von $3 \times 12 = 36$.
$\frac{4}{9}$ von $2 + \frac{1}{4} \times 12$, d. i. $24 + 3 = 27$.
$\frac{5}{9}$ von $1 + \frac{4}{5} \times 12$, d. i. $12 + 4 \times 2\frac{2}{5} = 8\frac{8}{5}$
oder $9\frac{3}{5}$ zu 12 $= 21\frac{3}{5}$.

12 ist

$\frac{6}{9}$, d. i. $\frac{2}{3}$, von $1 + \frac{1}{2} \times 12 = 18$.

$\frac{7}{9}$ von $1 + \frac{2}{7} \times 12$, d. i. $12 + 2 \times 1\frac{5}{7} = 2\frac{10}{7}$,
d. i. $3\frac{3}{7}$ zu $12 = 15 + \frac{3}{7}$.

$\frac{8}{9}$ von $12 + \frac{1}{8}$, d. i. $12 + 1\frac{1}{2}$ oder $13\frac{1}{2}$.

[Es versteht sich von selbst, daß hier anstatt der 12 auch eine jede andere Zahl gesetzt werden kann, an welcher sich dieselbe Uebung vollbringen läßt. Aber es ist die Sache des Lehrers, dazu selbst Beispiele zu wählen und anzuwenden. Es sey z. B. 30 eilf mal der funfzehnte Theil von dem unbekannten Ganzen. Hier sieht man, daß zu dem Ganzen nur noch 4 fehlen, das sind 4 solche Theile, als deren schon 11 vorhanden sind; also von den 30 fehlen noch $\frac{4}{11}$; $\frac{1}{11}$ von 30 ist aber $2\frac{8}{11}$; $\frac{4}{11}$ sind folglich 4×2, und 4×8, d. i. $\frac{32}{11}$, oder $2 + \frac{10}{11}$; dies mit dem 8 ist $10\frac{10}{11}$ zu $30 = 40\frac{10}{11}$. Es ist daher 30 eilf mal der funfzehnte Theil von $40 + \frac{10}{11}$. Eben so wird man auch verfahren, wenn z. B. $\frac{20}{21}$ eines Ganzen bekannt, dies selbst aber unbekannt wäre. Hier würde man bald sehen, daß die $\frac{20}{21}$ zwei und $\frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{3}$ mal wiederholt werden müssen, um $\frac{21}{21}$, d. i. ein Ganzes, auszumachen. Betrügen nun diese $\frac{20}{21}$ 40, so würde 40 eben so viel mal, nämlich $2 + \frac{1}{3}$ mal, genommen, dasjenige Ganze geben, von dem es 9 mal der 21ste Theil ist. Nun ist 2×40 gleich 80; $\frac{1}{3}$ von 40 ist $13\frac{1}{3}$; dies zu 80 ist $93\frac{1}{3}$; folglich ist 40 neun mal der ein und zwanzigste Theil von $93\frac{1}{3}$. Dies Verfahren greift überall durch, ohne irgend eine Veränderung zu erleiden. Diese Uebung wird übrigens in der Folge sehr häufig wiederkehren, und es ist daher nöthig, sie hier zur Fertigkeit zu bringen.]

Aufgaben.

1) Zur ersten Uebung.

a) Ein Ganzes, wie viel mal ist es $\frac{2}{13}$?

Antw. $6 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{13}$. Denn ein Ganzes hat $\frac{13}{13}$; 13 ist aber $6 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{13}$.

b) Wenn ich $\frac{5}{17}$ habe, wie viel fehlen mir noch zu einem Ganzen?

Antw. $2 + \frac{2}{5} \times \frac{5}{17}$. Denn $\frac{5}{17}$ sind vorhanden; $\frac{17}{17}$ sind ein Ganzes, und es fehlen also noch 12 solche Theile; 12 ist aber $2 + \frac{2}{5} \times 5$; folglich $2 + \frac{2}{5} \times \frac{5}{17}$ zu $\frac{5}{17}$ sind $\frac{17}{17}$ oder ein Ganzes.

c) $\frac{11}{16}$, wie viel fehlen noch zum Ganzen?

Antwort: $\frac{5}{11}$. Denn von 11 bis 16 fehlen noch fünf solche Theile, als ihrer 11 vorhanden sind; 5 ist aber von eilf $\frac{5}{11}$.

2) Zur zweiten Uebung.

a) 15 ist $\frac{2}{3}$ eines unbekannten Ganzen; welche Zahl ist dies Ganze?

Antw. $22\frac{1}{2}$. Denn $1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{3}$ oder ein Ganzes. Da nun 15 $\frac{2}{3}$ des Ganzen ist, so muß $1 + \frac{1}{2} \times 15$ den Inhalt des Ganzen geben. Nun ist $\frac{1}{2}$ von 15 $7 + \frac{1}{2}$; dies zu 15 ist $22\frac{1}{2}$.

b) Von welcher Zahl ist 24 drei Viertel?

Antw. Von 32. Denn $\frac{4}{4}$ ist $1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$; 24 ist gleich $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{4}$ ist folglich $1 + \frac{1}{3} \times 24$; $\frac{1}{3}$ von 24 ist 8; $24 + 8 = 32$.

c) Von welcher Zahl ist 50 4 mal der siebente Theil?

Antw. Von $87\frac{1}{2}$. Denn $\frac{7}{7}$ ist $1 + \frac{3}{4} \times \frac{4}{7}$; 50 ist gleich $\frac{4}{7}$. Das Ganze $(\frac{7}{7})$ ist folglich $1 + \frac{3}{4} \times 50$. $\frac{1}{4}$ von 50 ist $12\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ ist folglich $3 \times 12 + \frac{1}{2} = 37\frac{1}{2}$; dies zu 50 ist $87 + \frac{1}{2}$.

d) Von welcher Zahl ist 50 vier mal der neunte Theil?

Antw. Von $112\frac{1}{2}$. Denn $\frac{9}{9}$ (ein Ganzes) ist $2 + \frac{1}{4} \times \frac{4}{9}$; 50 ist gleich $\frac{4}{9}$; das Ganze ist folglich $2 + \frac{1}{4} \times 50$, d. i. $100 + 12\frac{1}{2}$.

e) Von welcher Zahl ist 50 $\frac{7}{12}$?

Antw. Von $70\frac{5}{7}$. Denn $\frac{12}{12}$ ist $1 + \frac{5}{7} \times \frac{7}{12}$; 50 ist $\frac{7}{12}$; das Ganze ist folglich $1\frac{5}{7} \times 50$; $\frac{1}{7}$ von $50 = 4\frac{1}{7}$; $\frac{5}{7}$ ist 5×4 und $5 \times \frac{1}{7}$; zu 50 ist $70\frac{5}{7}$.

f) 100 ist $\frac{3}{11}$ eines unbekannten Ganzen; wie viel beträgt das Ganze.

Antw. $366\frac{2}{3}$. Denn $\frac{11}{11}$ ist $3 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{11}$; $\frac{3}{11}$ ist 100; $\frac{11}{11}$ ist folglich $3 + \frac{2}{3} \times 100$, d. i. $300 + 66\frac{2}{3}$.

g) 100 ist $\frac{7}{30}$ eines unbekannten Ganzen; welche Zahl ist das Ganze?

Antw. $428 + \frac{4}{7}$. Denn $\frac{30}{30}$ ist $4\frac{2}{7} \times \frac{7}{30}$; $\frac{7}{30}$ ist 100; $\frac{30}{30}$ ist folglich $4 + \frac{2}{7} \times 100$; 4×100 ist 400; $\frac{1}{7}$ von 100 ist $14\frac{2}{7}$; $\frac{2}{7}$ ist folglich $2 \times 14\frac{2}{7}$, d. i. $28\frac{4}{7}$ zu 400 ist $428\frac{4}{7}$.

[Diese Uebung geht ihrem Umfange nach so weit, als das Gebiet der arithmetischen Verhältnisse überhaupt reicht. Im Wesentlichen stützt sie sich auf die einmal angenommene Zahlenreihe, und auf die Anordnung derselben. Es bleibt immer nur das einfache Verhältniß, welches die Einheiten alle mit einander haben. So bald z. B. $\frac{5}{7}$ da sind, so ist die 7 nur die Andeutung der Größe oder des Werthes der Theile in Beziehung auf das Ganze; die Fünf hingegen zeigt das fünfmalige Vorhandenseyn derselben an. In Beziehung auf diese 5 müssen nun alle diejenigen Theile, welche in Beziehung auf 7 Siebentel wären, natürlicher Weise als Fünftel aufgefaßt werden. Denn die 7 Siebentel sind nur in der Imagination, noch nicht in der Wirklichkeit vorhanden. Das Wirkliche läßt sich hier, wie überall, aber nie aus dem Imaginären finden, sondern umgekehrt. Daß übrigens hier die unmittelbarste Verbindung genommen sey, wird ein jeder schon von selbst finden.]

§. 20.

Die Theile eines Ganzen können sich vermehren und vermindern. Dies kann aber für unsere Vorstellung auf keine andere Weise geschehen, als wie wir selbst zählen. Denn die Zahlenreihe bleibt uns immer die Normalregel. Lassen wir ein Ganzes nach Gefallen zerlegen, so müssen die Benennungen, und folglich auch die Theilvorstellungen, alle aus dem dekadischen Systeme entlehnt werden. Man wähle Drittel, so sieht man, daß hier die Vorstellung der 3 zum Grunde liegt; man wähle Viertel, so wird man eben so leicht bemerken, daß diese nur in Beziehung auf 4 genommen sind. Denkt man sich nun das Ganze immer als gleich bleibend, und die Theile immer als sich vermehrend, so werden natürlich die Theile selbst immer kleiner werden, jemehr die Anzahl derselben steigt. Dies Steigen können wir aber nicht anders, als nach der Regel, und folglich auch nach dem Verhältnisse des Zählens, denken; d. h. so wie wir zählen: 1, 2, 3, 4 u. s. f., so müssen wir auch theilen: 1) Ganzes, 2) Halbe, 3) Drittel, 4) Viertel u. s. f. Da aber alle Zahlen in einem nothwendigen Verhältnisse stehen, so müssen es auch die verschiedenartigen Theile eines Ganzen. Nun findet aber der Unterschied Statt, daß wir vorher mit dem Zählen von Eins u. s. f. den Begriff des Vergrößerns verbanden; hier aber kommt es auf kein Vergrößern

an, sondern auf ein Vermehren der Theile eines und desselben Ganzen. Es wird mithin ein jeder einzelne Theil in eben demselben Verhältnisse kleiner werden, als die Summe der Theile eines Ganzen sich vermehrt. Ein Viertel enthält natürlich einen geringern Theil des Ganzen, als ein Drittel; und $\frac{1}{5}$ ist bei Weitem weniger, als $\frac{1}{2}$. Der Maßstab, in welchem Verhältnisse alle denkbare Theile eines Ganzen stehen, ist in ihrer Benennung gegeben. Denn ein kleinerer Theil muß mit einem größern in eben demselben Verhältnisse stehen, als eine kleinere Zahl mit einer größern. So wie also 3 von 4 nie mehr und nie weniger seyn kann, als $\frac{3}{4}$; so kann ebenfalls $\frac{1}{4}$ von einem Drittel nie mehr und nie weniger seyn, als $\frac{3}{4}$; weil ja eben in der Anordnung der Zahlenreihe selbst der Grund jener Verhältnisse liegt. Man kann sich dies auch auf folgende Weise veranschaulichen: Denke man sich die concrete Zahl 3 in vier gleiche Theile getheilt, so würde jede Eins in vier gleiche Theile zerlegt werden müssen. Jetzt nehme man von jeder Eins den vierten Theil weg, so werden von jeder noch drei Theile übrig bleiben, und durch das Abziehen hat man ebenfalls drei solcher Theile bekommen, als noch zurück blieben. Es hat sich daher aus den drei Zahlen eine vierte gebildet, ohne daß etwas Neues zu dem Vorhandenen gekommen ist; oder, der Numerus der Theile hat sich vermehrt, ohne daß sich das Ganze selbst

vergrößert hat. Wenn man nun diese Drei als Bestandtheile eines Ganzen auffaßt, so kann sich das Verhältniß um nichts ändern. Jetzt wird folgender Beweis für die Wahrheit des Satzes, daß nämlich $\frac{1}{4}$ von einem Drittel drei Viertel sey, verständlich seyn: Ein Ganzes hat drei Drittel; der vierte Theil von 3 ist $\frac{3}{4}$; der vierte Theil von $\frac{3}{3}$ ist folglich auch $\frac{3}{4}$ des Drittels. Was von einem Verhältnisse gilt, das gilt auch von andern, weil der Grund überall derselbe bleibt. Es bewährt sich hier also das schon oben angedeutete Gesetz: daß allezeit dasjenige, was von concreten Zahlen gilt, auch von abstracten Gültigkeit habe.

Es verhalten sich demnach die abstracten Zahlen eben so zu einander, als die concreten. Nur muß man nicht vergessen, daß eine arithmetische Größe allezeit in einem bloßen Verhältnisse des Mehrs oder Minders, ohne Berücksichtigung des Werthes, besteht. So wie also 4 von 5 $\frac{4}{5}$, und von 7 $\frac{4}{7}$ u. s. f. ist, so muß nun auch $\frac{1}{5}$ von $\frac{1}{4}$ seyn $\frac{4}{5}$, und $\frac{1}{7} = \frac{4}{7}$ des Viertels; und so wie 5 die 4 ein und ein viertel mal, die 7 hingegen ein und drei viertel mal, enthält, so muß auch ein Viertel den fünften Theil desselben Ganzen $1 + \frac{1}{4}$ mal, den siebenten hingegen $1 + \frac{3}{4}$ mal, enthalten. So wie 8 ist 2×4, so muß $\frac{1}{4}$ seyn $2 \times \frac{1}{8}$; dagegen $2 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{9}$ u. s. f. Es kann also nie Schwierigkeiten machen, Theile mit Theilen zu vorgleichen. Die ganze Sache ist begriffen,

wenn man sich nur gewöhnt hat die Zahlen als bloße Verhältnisse anzusehen.

Uebung.

Halbe und Drittel.

$2 \times 3 = 3 \times 2$. 1×2, d. i. $\frac{1}{3}$, ist von 1×3, d. i. $\frac{1}{2}$, dieses Ganzen $\frac{2}{3}$; und 1×3, d. i. $\frac{1}{2}$, ist $1 + \frac{1}{2} \times 2$, d. i. einem Drittel; folglich ist $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ des Halben, und ein Halb ist $1 + \frac{1}{2}$ des Drittels.

Halbe und Fünftel *).

$2 \times 5 = 5 \times 2$. 1×2, d. i. $\frac{1}{5}$, ist $\frac{2}{5}$ von 1×5, d. i. $\frac{1}{2}$ dieses Ganzen; $\frac{1}{5}$ ist folglich $\frac{2}{5}$ des Halben, und $\frac{1}{2}$ ist $\frac{5}{2}$, d. i. $2\frac{1}{2}$, des Fünftels.

Halbe und Siebentel.

$2 \times 7 = 7 \times 2$. 1×2, d. i. $\frac{1}{7}$, ist von 1×7, d. i. $\frac{1}{2} = \frac{2}{7}$, und 1×7 ist $3\frac{1}{2} \times 2$; folglich ist $\frac{1}{7}$ von $\frac{1}{2} = \frac{2}{7}$, und $\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$, d. i. $3\frac{1}{2}$, des Siebentels.

Halbe und Neuntel.

$2 \times 9 = 9 \times 2$. 1×2, oder $\frac{1}{9}$, ist $\frac{2}{9}$ von 1×9, d. i. $\frac{1}{2}$ dieses Ganzen. Es ist daher $\frac{1}{9}$ des Ganzen $\frac{2}{9}$ des Halben, und $\frac{1}{2}$ ist $\frac{9}{2}$, oder $4\frac{1}{2}$ mal $\frac{1}{9}$.

*) Halbe und Viertel, 6tel, 8tel, mit einem Worte: respective gleiche Theile von Ganzen, sind schon in dem Vorigen verglichen; daher ist hier nur von respectiven ungleichen Theilen des Ganzen die Rede.

[Jedermann wird sehen, daß diese Uebung weiter fortgesetzt werden könne, und daß von Eilfteln, Dreizehnteln u. s. f. dasselbe gelte, was hier von Fünfteln, Neunteln u. s. f. gilt.]

Drittel und Viertel.

$3 \times 4 = 4 \times 3$. 1×3, d. i. $\frac{1}{4}$, ist von 1×4, d. i. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$; und 1×4 ist $1\frac{1}{3}$ von 1×3. Es ist daher $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$ des Drittels, und $\frac{1}{3}$ ist $1\frac{1}{3}$ des Viertels.

Drittel und Fünftel.

$3 \times 5 = 5 \times 3$. 1×3, d. i. $\frac{1}{5}$, ist $\frac{3}{5}$ von 1×5, d. i. $\frac{1}{3}$ des Ganzen, und 1×5, $\frac{5}{3}$ oder $1\frac{2}{3} \times 3$, oder $\frac{1}{5}$. Es ist daher $\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ des Drittels und $\frac{1}{3}$ $1\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$.

Drittel und Siebentel.

$3 \times 7 = 7 \times 3$. $1 \times 3 = \frac{3}{7}$ von 1×7; $1 \times 7 = \frac{1}{3}$; $1 \times 3 = \frac{1}{7}$. Es ist daher $\frac{1}{7} = \frac{3}{7}$ von $\frac{1}{3}$, und $\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}$.

Drittel und Achtel.

$3 \times 8 = 8 \times 3$. 1×3, d. i. $\frac{1}{8}$, ist $\frac{3}{8}$ von 1×8, d. i. $\frac{1}{3}$, und 1×8 ist $2\frac{2}{3} \times 3$; folglich ist $\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ v. $\frac{1}{3}$, und $\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$.

u. s. f.

Viertel und Fünftel.

$4 \times 5 = 5 \times 4$. 1×4, oder $\frac{1}{5}$, ist $\frac{4}{5}$ von 1×5 oder dem Viertel; und 1×5 $(\frac{1}{5})$ ist $1\frac{1}{4} \times 4$ $(\frac{1}{5})$; folglich ist $\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ von $\frac{1}{4}$, und $\frac{1}{4}$ $1\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$.

Viertel und Sechstel.

$4 \times 6 = 6 \times 4$. 1×4 $(\frac{1}{6})$ ist $\frac{4}{6}$ oder $\frac{2}{3}$ von 1×6 $(\frac{1}{4})$, und 1×6 $(\frac{1}{3})$ ist $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$ von 1×4 (d. i. $\frac{1}{6}$). Es ist daher ꝛc.

Viertel und Siebentel.

$4 \times 7 = 7 \times 4$. 1×4 $(\frac{1}{7})$ ist $\frac{4}{7}$ von 1×7 $(\frac{1}{4})$, und 1×7 $(\frac{1}{4})$ ist $\frac{7}{4}$ oder $1\frac{3}{4} \times 4$ $(\frac{1}{7})$. Es ist daher $\frac{1}{7} = \frac{4}{7}$ von $\frac{1}{4}$, und $\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4} \times \frac{1}{7}$.

[Es ist leicht einzusehen, daß mit allen übrigen Theilen von respectiven Ganzen eben so zu verfahren sey. Sollen z. B. Neuntel mit Eilfteln verglichen werden, so vergleicht man nur die concreten Zahlen Neun und Eilf mit einander, um das gegenseitige Verhältniß dieser beiden Theile zu finden. Ist uns daran gelegen, dies intuitiv darzuthun, so verfährt man wie oben. Nämlich: $9 \times 11 = 11 \times 9$. 1×9 $(\frac{1}{11})$ ist $\frac{9}{11}$ von 1×11 $(\frac{1}{9})$, und 11 $(\frac{1}{9})$ ist $\frac{11}{9}$, d. i. $1\frac{2}{9} \times 9$ $(\frac{1}{11})$; folglich ist $\frac{1}{11} = \frac{9}{11}$ des Neuntels, und $\frac{1}{9} = 1\frac{2}{9}$ des Eilftels.]

Wenn dieses auf eine anschauliche Weise dargethan ist, so läßt man dasselbe auch in einer abstractern Sprache wiederholen, damit die Verbindung desto unmittelbarer geschehe. Anstatt, daß also oben gezeigt worden ist, daß das Verhältniß der Theile aus der Multiplication derjenigen concreten Zahlen hervorgehe, von welchen die Theile den Namen führen, z. B. der Halben und Drittel, aus der Multiplication der 2 mit 3, der Drittel und Viertel, aus der Multiplication der 3 mit der 4 u. s. f., so muß nun auch dieses Verhältniß durch die unmittelbarste Beziehung der respecti-

ven Theile als solcher dargethan werden. Man wird daher auch den Satz, daß $\frac{1}{3}$ von einem Halben $\frac{2}{3}$ sey, so darstellen: Ein Ganzes hat $\frac{3}{3}$; jedes Drittel hat 2 halbe Drittel; $\frac{3}{3}$ sind 3×2, das sind 6 halbe Drittel; ein Halb des Ganzen hat 3 halbe Drittel; 2 halbe (d. i. ein Ganzes) Drittel sind von 3 halben Dritteln (d. i. $\frac{1}{2}$ des Ganzen) $\frac{2}{3}$. Man sieht, daß das Verfahren von dem Vorigen nur durch die nähere Beziehung auf das Ganze verschieden ist. Es wird daher auch keiner besondern Uebung bedürfen, um dies einzusehen.

Wohl aber ist es eine noch wesentlich hieher gehörige Uebung, die verschiedenen Theile auf ihr respectives Ganze zu beziehen. Dies geschieht, indem man die Theile selbst wieder zerspaltet, und daraus die Anzahl der kleinern Theile ableitet, die für das Ganze entstehen. Wenn Drittel und Halbe zu vergleichen sind, so werden zuvörderst alle Drittel in halbe Drittel getheilt. Da das Ganze drei Drittel hat, so werden es 6 halbe Drittel; ein halbes Drittel ist also der sechste Theil des Ganzen. Es gilt hier die Regel: Will man verschiedenartige Theile auf ihr Ganzes beziehen, so multiplicire man dieselben; der Quotient, welcher dadurch entsteht, ist dann das Ganze, das in so viel Theile zerlegt erscheint, als durch die Multiplication der gegebenen aliquoten Theile entstanden sind. Man denke sich $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{5}$. Will man wissen, wie viel beide Theile des Ganzen sind, so muß man entweder die Siebentel in

Fünftel, oder die Fünftel in Siebentel theilen; dies geschieht, indem man die Fünf durch die Sieben, oder diese durch jene multiplicirt; $\frac{5}{5}$ sind dann $5 \times 7 = 35$ Siebentel Fünftel, oder $\frac{35}{35}$, d. i. ein Ganzes. Nun hat $\frac{1}{5}$ 7 und $\frac{1}{7}$ $\frac{5}{35}$; beide haben also $5 + 7$, das sind $\frac{12}{35}$. So wie sich hier Fünftel und Siebentel in fünf Dreißigstel auflösen, so lösen sich, nach eben derselben Regel, Drittel und Viertel in Zwölftel, Viertel und Fünftel in Zwanzigstel, auf. Durch die Multiplication der gegebenen ungleichen Theile entstehen also die aliquoten kleinern Theile des Ganzen, in welche sich die größern auflösen, und die Addition beider giebt den Inhalt derselben. So macht $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$; denn $4 \times \frac{3}{4}$ des Drittels sind $\frac{12}{34}$ oder $\frac{12}{12}$; der dritte Theil hat vier, der vierte Theil drei Zwölftel, das sind $\frac{7}{12}$ u. s. f.

Uebung.

Ein Halb, welches in zwei gleiche Theile getheilt wird, giebt zwei Halbe des Halben. Ein Ganzes hat 2 Halbe, folglich zwei mal 2 Halbe des Halben, das sind $\frac{4}{4}$ des Ganzen. Ein Halb des Halben ist also $\frac{1}{4}$ des Ganzen.

Jedes Halbe kann in drei Theile getheilt werden. Das Ganze hat zwei Halbe, das sind $2 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$ des Halben oder $\frac{6}{6}$ des Ganzen; $\frac{1}{3}$ des Halben ist folglich $\frac{1}{6}$ des Ganzen.

Jedes Halb in vier gleiche Theile, giebt 8 gleiche Theile des Ganzen; $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{2}$ ist folglich $\frac{1}{8}$ von 1.

Ein Halb in fünf gleiche Theile: $\frac{2}{2}$, oder 1, ist $2 \times \frac{5}{5} = \frac{10}{5}$ Halbe oder $\frac{10}{10}$ des Ganzen; $\frac{1}{5}$ von $\frac{1}{2}$ ist folglich $\frac{1}{10}$ des Ganzen.

Ein Drittel in drei gleiche Theile: Das Ganze hat $\frac{3}{3}$; jedes Drittel wieder drei gleiche Theile, giebt neun gleiche Theile des Ganzen; $\frac{1}{3}$ des Drittels ist also $\frac{1}{9}$ des Ganzen.

Ein Drittel in vier gleiche Theile sind $3 \times \frac{3}{4}$, sind $\frac{12}{12}$ des Ganzen; $\frac{1}{4}$ des Drittels ist also $\frac{1}{12}$ des Ganzen; ein Viertel hat 3, ein Drittel $\frac{4}{12}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

Ein Drittel in fünf gleiche Theile sind $5 \times \frac{3}{3}$, das sind $\frac{15}{15}$ des Ganzen; $\frac{1}{5}$ hat 3, ein Drittel $\frac{5}{15}$; $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ sind folglich $3 + 5 = \frac{8}{15}$; ein Fünftel des Drittels ist folglich $\frac{1}{15}$ des Ganzen.

[Eben so lassen sich Drittel in mehrere kleine Theile zerlegen. Man sieht es, daß man mit allen andern Theilen auf eben dieselbe Weise verfahren müsse, um die nächste Beziehung auf das Ganze zu bekommen, und die Auflösung aller verschiedenartigen Theile in aliquote gleiche Theile des Ganzen zu vermitteln. Es bedarf gewöhnlich nur weniger Beispiele, um dies zur vollkommenen Klarheit zu bringen. Wenn man den Inhalt mehrerer Theile, z. B. $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{7}$ wissen will, so werden die $\frac{2}{5}$ in Siebentel Fünftel oder in Fünf und Dreißigstel aufgelöset. Es ergiebt sich dann, daß $\frac{2}{5}$ sind $2 \times \frac{1}{7}$ des Fünftels, oder $\frac{14}{35}$ sind; dazu kommt noch $\frac{1}{7}$, das sind $\frac{5}{35}$ zu 14 sind $\frac{19}{35}$.

Zur größern Verständlichkeit füge ich diesem noch einige Auflösungen bei: $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$. Ein Fünftel hat $\frac{6}{30}$;

das Ganze hat $\frac{5}{5}$, das sind $6 \times \frac{5}{5}$ des Sechstels, oder $\frac{30}{30}$; davon ist $\frac{1}{5}$ 6, und $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{30}$; beide also $^{6}\frac{+}{30}{}^{5}$. Es ist daher $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$. $\frac{2}{5} + \frac{1}{6}$ ist $2 \times 6 + 1 \times 5 = \frac{17}{30}$. $\frac{3}{5} + \frac{1}{6}$ ist $3 \times 6 + 1 \times 5 = \frac{23}{30}$. $\frac{4}{5} + \frac{1}{6}$ ist 4×6 und $1 \times 5 = \frac{29}{30}$. Das Verfahren ändert sich nirgends. Man vergleicht z. B. Fünftel mit Achteln. Hier sieht man, daß diese sich in $5 \times \frac{8}{40}$ oder in Vierzigstel auflösen müssen. Will man den Betrag von $\frac{3}{8} + \frac{1}{5}$ wissen, so löst man $\frac{3}{8}$ in $3 \times \frac{5}{40}$, das sind $\frac{15}{40}$, auf; der fünfte Theil hat $\frac{8}{40}$, zusammen machen dies also $\frac{23}{40}$. Dagegen sind $\frac{3}{5} + \frac{1}{8} = {}^{24}\frac{+}{40}{}^{5}$, weil $\frac{1}{5}$ acht Fünftel des Achtels; folglich $\frac{3}{5}$ auch die dreimalige Verdoppelung dieser Zahl ist; ein ganzes Achtel aber nicht mehr seyn kann, als $\frac{5}{5}$ oder der Inbegriff seiner Theile. Auf diese Weise gehen also $\frac{29}{40}$ als der Inhalt von $\frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ von selbst hervor.]

Aufgaben.

1.

a) Ein Siebentel, wie viel enthält es Theile des Fünftels?

Antw. $\frac{5}{7}$. Denn 7×5 ist 5×7; 1×5, oder $\frac{1}{7}$, ist von 1×7, oder $\frac{1}{5}$, des Ganzen $\frac{5}{7}$. Oder: ein Siebentel hat $\frac{5}{5}$; ein Fünftel hat $\frac{7}{7}$; $\frac{5}{7}$ ist von $\frac{7}{7}$ $\frac{5}{7}$.

b) Ein Viertel, wie viel mal enthält es den 9ten Theil des Ganzen?

Antw. $2\frac{1}{4}$ mal. Denn $\frac{1}{9}$ hat $\frac{4}{9}$ des Viertels; $\frac{1}{4}$ hat $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{9}$ ist $2\frac{1}{4} \times \frac{4}{9}$; folglich ist auch $\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{4} \times \frac{1}{9}$.

c) $\frac{4}{9}$, wie viel mal enthalten sie $\frac{1}{5}$?

Antw. $2 + \frac{2}{9}$. Denn $\frac{1}{9}$ hat $\frac{5}{9}$ des Fünftels; $\frac{4}{9}$ sind $4 \times \frac{5}{9}$, das sind $\frac{20}{9}$; $\frac{1}{5}$ hat $\frac{9}{5}$; 20 ist $2 + \frac{2}{9} \times 9$; folglich sind $\frac{4}{9}$ $2 + \frac{2}{9} \times \frac{1}{5}$.

d) $\frac{4}{5}$, wie viel mal $\frac{1}{9}$?

Antw. $7 + \frac{1}{5}$. Denn $\frac{1}{5}$ hat $\frac{9}{5}$; $\frac{4}{5}$ sind $4 \times 9 = \frac{36}{5}$; ein Neuntel hat $\frac{5}{5}$; 36 ist $7 + \frac{1}{5} \times 5$; folg-

lich enthalten $\frac{4}{5}$ den 9ten Theil eines Ganzen $7 + \frac{1}{5}$tel mal.

e) $\frac{5}{7}$, wie viel mal $\frac{1}{4}$?

Antw. $2\frac{5}{7} \times \frac{1}{4}$. Denn $\frac{5}{7}$ sind 5×4, d. i. $\frac{20}{7}$; ein Viertel hat $\frac{1}{7}$; 20 ist $2 + \frac{6}{7} \times 7$; folglich sind auch $\frac{5}{7}$ $2 + \frac{6}{7} \times \frac{1}{4}$.

f) $\frac{3}{4}$, wie viel mal $\frac{1}{7}$?

Antw. $5\frac{1}{4}$ mal. Denn $\frac{3}{4}$ sind $3 \times 7 = \frac{21}{4}$; $\frac{1}{7}$ hat $\frac{4}{21}$; 21 ist $5 + \frac{1}{4} \times 4$.

g) $\frac{8}{9}$, wie viel mal $\frac{1}{7}$?

Antw. $6 + \frac{2}{9}$. Denn $\frac{8}{9}$ sind $8 \times 7 = \frac{56}{9}$; $\frac{1}{7}$ hat $\frac{9}{56}$; 56 ist $7\frac{2}{9} \times 9$; folglich sind auch $\frac{8}{9}$ $7 + \frac{2}{9} \times \frac{1}{7}$.

2.

h) $\frac{1}{\frac{1}{7}}$, der wievielste Theil des Ganzen?

Antw. $\frac{1}{35}$. Denn ein Ganzes hat $\frac{7}{7}$; jedes Siebentel in fünf gleiche Theile sind $5 \times \frac{7}{7} = \frac{35}{7}$ oder $\frac{35}{35}$; $\frac{1}{7}$ ist von $\frac{35}{7}$ $\frac{1}{35}$.

i) $\frac{\frac{2}{7}}{5}$, wie viel Theile des Ganzen?

Antw. $\frac{2}{35}$. Denn das Ganze hat $\frac{5}{5}$; jedes Fünftel hat $\frac{7}{7}$; $\frac{5}{5}$ sind folglich $5 \times \frac{7}{7} = \frac{35}{7}$; $\frac{2}{7}$ sind von $\frac{35}{7}$ $\frac{2}{35}$; folglich sind $\frac{2}{7}$ des Fünftels $\frac{2}{35}$ des Ganzen.

k) $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$, wie viel sind es Theile des Ganzen?

Antw. $\frac{9}{20}$. Denn $\frac{1}{5}$ hat $\frac{4}{20}$; $\frac{1}{4}$ hat $\frac{5}{20}$; $\frac{4+5}{20}$ sind $\frac{9}{20}$; das Ganze hat $\frac{5}{5}$, das sind $5 \times 4 = \frac{20}{4}$ oder $\frac{200}{20}$; folglich sind $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ $\frac{9}{20}$ des Ganzen.

l) $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$, wie viel Theile des Ganzen?

Antw. $\frac{13}{20}$. Denn $\frac{2}{5}$ sind $2 \times 4 = \frac{8}{20}$; $\frac{1}{4}$ hat $\frac{5}{20}$; dies zu 8 ist $\frac{13}{20}$; das Ganze hat $\frac{5}{5}$, das sind $5 \times 4 = \frac{20}{20}$ oder $\frac{20}{20}$; $\frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$.

m) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$, wie viel sind es Theile des Ganzen?

Antw. $\frac{17}{20}$. Denn das Ganze hat $\frac{5}{5}$; $\frac{1}{4}$ hat $\frac{5}{4}$ des Fünftels; $\frac{1}{5}$ hat $\frac{4}{4}$ Fünftel; $\frac{3}{5}$ sind $3 \times 4 = \frac{12}{20}$; $12 + 5 = \frac{17}{20}$ oder $\frac{17}{20}$.

[Eben so kann man auch verschiedenartige Theile auf andere reduciren. Z. B. es kann die Frage seyn: $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{4}$, wie viel sind es Theile von $\frac{3}{4}$? Hier löst man, auf die oben beschriebene Weise, Fünftel und Viertel in Zwanzigstel auf. Man wird dann finden, daß $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{4}$ $\frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$; $\frac{3}{4}$ hingegen $3 \times 5 = \frac{15}{20}$, geben. Nun ist aber 13 von 15 $\frac{13}{15}$; folglich sind auch $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ des Ganzen $\frac{13}{15}$. Dasselbe gilt, wenn man kleinere Theile in größere umsetzen will. Man nehme z. B. $\frac{8}{3\,5}$. Wenn man weiß, daß $\frac{1}{3\,5}$ $\frac{1}{5}$ des Siebentels ist, so wird man leicht einsehen, daß $\frac{8}{3\,5}$ seyn müssen $\frac{8}{5}$ dieses Siebentels. Da nun $\frac{5}{7}$ ein ganzes Siebentel geben, so sind $\frac{8}{5\,7}$ ein Siebentel und $\frac{8}{5}$ des Siebentels. Bezieht man aber diese $\frac{8}{3\,5}$ auf Fünftel, so darf man nur wissen, der wievielste Theil $\frac{1}{3\,5}$ von einem Fünftel ist. Dies findet man aber durch die Ueberlegung, daß ein Fünftel von $\frac{3}{3\,5}$ $\frac{7}{3\,5}$ enthält. Daraus folgt natürlich, daß $\frac{1}{3\,5}$ der siebente Theil von $\frac{7}{3\,5}$ oder einem Fünftel seyn müsse. $\frac{8}{3\,5}$ des Ganzen müssen folglich $\frac{8}{7\,5}$ oder ein ganzes Fünftel und $\frac{1}{7}$ des Fünftels seyn. Es hindert nichts, daß man auch die Uebungen über die Einheit, die als Ganzes angesehen wird, ausdehne. Dann löset man nur die über das Ganze hinausgehenden Theile eben so auf, als das Ganze selbst. Wäre z. B. die Frage: $1\frac{1}{4}$, wie viel mal der fünfte Theil eines Ganzen? so sieht man, daß die ganze Summe, welche getheilt werden soll, aus $\frac{5}{4}$ besteht. Denn ein Ganzes hat vier Viertel; wenn zu diesen noch ein Viertel hinzu genommen wird, so werden es $\frac{5}{4}$. Nun ist aber ein Fünftel nur $\frac{4}{5}$ eines Viertels. Jedes Viertel muß $\frac{5}{5}$ haben. Da $\frac{5}{4}$ vorhanden sind, so werden es $5 \times \frac{5}{5}$, das sind $\frac{25}{5}$, werden; diese enthalten die $\frac{4}{5}$ $6 + \frac{1}{5}$ mal. Ueberhaupt muß man sich nie denken, daß das Ganze ein absolutes Verhältniß begründe; es be-

deutet durchaus nichts weiter, als irgend eine Vollständigkeit der Theile. In dem letztern Beispiele sind die $\frac{5}{4}$ das Ganze, weil der aliquote fünfte Theil darauf bezogen werden sollte. Gesetzt es wären $\frac{10}{20}$ vorhanden, so würde $\frac{1}{20}$ von diesen $\frac{10}{20}$ nur $\frac{1}{10}$ seyn. Die höhere Zahl begreift allezeit die niedere in sich; und die letztere bleibt, in Beziehung auf die erstere, immer nur Theil. Ist z. B. ein Ganzes mit einem andern Ganzen und $\frac{1}{5}$ zu vergleichen, so wird das erstere von dem letztern $\frac{5}{6}$ seyn. Denn jedes Ganze hat $\frac{5}{5}$; das letztere Ganze hat aber noch $\frac{1}{5}$ mehr; dies zu den $\frac{5}{5}$ giebt $\frac{6}{5}$. Nun ist aber 5 von $6 = \frac{5}{6}$; folglich auch $\frac{5}{5}$ oder ein Ganzes von $\frac{6}{5}$, oder einem Ganzen und einem Fünftel, $\frac{5}{6}$. Eben so ist 1 von $1\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12}{13}$. Denn ein Ganzes hat $\frac{3}{3}$; dazu noch $\frac{1}{3}$ sind $\frac{4}{3}$. Ein Viertel hat $\frac{3}{4}$. Jedes ganze Drittel hat $\frac{4}{4}$; $\frac{4}{3}$ sind folglich 4×4 oder $\frac{16}{4}$; dazu noch die drei, sind $\frac{19}{4}$. Ein Ganzes hat $\frac{3}{3}$, das sind 3×4 oder $\frac{12}{3}$. Jetzt ist das Verhältniß gemacht; denn 12 ist von 19 $\frac{12}{19}$. Es ist daher auch 1 von $1\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12}{19}$; oder umgekehrt: $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ enthält ein Ganzes ein und sieben Zwölftel mal. So kann auch z. B. $\frac{3}{4}$ mit einem Ganzen und $\frac{2}{5}$ u. s. f. verglichen werden. Man löset dann die Fünftel in Viertel, oder letztere in erstere auf. Ein Ganzes und zwei Fünftel sind $\frac{7}{5}$, das sind $7 \times 4 = \frac{28}{5}$. Ein Viertel hat $\frac{5}{5}$; drei Viertel sind folglich $\frac{15}{5}$. Da nun 15 von 28 ist $\frac{15}{28}$, so sind auch $\frac{3}{4}$ von $1 + \frac{2}{5}$ $\frac{15}{28}$; oder $1 + \frac{2}{5}$ enthält drei Viertel $1 + \frac{13}{15}$ mal. Was die Uebungen anbelangt, so dürfen diese nicht besonders angestellt werden, da es im Grunde nur eine weitere Anwendung dessen ist, was dem Zöglinge schon durch das Vorhergehende deutlich geworden seyn muß. Auch wird es gerade nicht so nöthig seyn, dieses noch besonders einzuprägen; denn es läßt sich an wenig Beispielen deutlich nachweisen.]

Fortsetzung der Aufgaben.

n) Ein Fünftel und $\frac{1}{7}$ des Fünftels, wie viel sind es Theile des Ganzen?

Antw. $\frac{8}{35}$. Denn das Ganze hat $\frac{5}{5}$; jedes Fünftel hat $\frac{7}{5}$; $\frac{5}{5}$ sind folglich $5 \times 7 = \frac{35}{5}$ oder

$\frac{3}{3}\frac{5}{5}$. Ein Fünftel, das sind $\frac{7}{5} + \frac{1}{5}$ sind $\frac{8}{5}$ oder $\frac{8}{35}$.

o) Ein Ganzes, wie viel mal enthält es $\frac{2}{7} + \frac{1}{5}$ und $\frac{3}{5}$ des Siebentels?

Auflösung: Das Ganze hat $\frac{7}{7}$, d. s. $7 \times 5 = \frac{35}{7}$ oder $\frac{3}{3}\frac{5}{5}$; $\frac{2}{7}$ sind $2 \times 5 = \frac{10}{35}$. Ein Fünftel hat $\frac{7}{35}$, und drei Fünftel des Siebentels sind $\frac{3}{35}$ des Ganzen. $10 + 7 + 3 = \frac{20}{35}$; folglich sind auch $\frac{2}{7} + \frac{1}{5} + \frac{3}{35} = \frac{20}{35}$ des Ganzen.

p) $\frac{10}{35}$, wie viel mal sind es $\frac{2}{7}$?

Antw. $1 + \frac{3}{10}$ mal. Denn $\frac{2}{7}$ sind $2 \times 5 = \frac{10}{35}$. $\frac{10}{35}$ ist $1 + \frac{3}{10} \times \frac{10}{35}$, folglich auch $1 + \frac{3}{10} \times \frac{2}{7}$.

q) $\frac{29}{35}$, wie viel mal sind es $\frac{1}{5} + \frac{1}{7}$?

Antw. $2 + \frac{5}{12}$. Denn $\frac{1}{5}$ hat 7 und $\frac{1}{7}$ hat $\frac{5}{35}$; $7 + 5 = 12$; 29 ist $2 + \frac{5}{12} \times 12$; folglich sind auch $\frac{29}{35}$ $2 + \frac{5}{12} \times \frac{12}{35}$.

r) $\frac{3}{8}$, wie viel sind es Theile von $1 + \frac{1}{5}$?

Auflösung: $\frac{3}{8}$ sind $3 \times 5 = \frac{15}{8}\frac{5}{4}$ oder $\frac{15}{40}$. Das Ganze hat 40 und ein Fünftel 8, das sind $\frac{48}{40}$; $\frac{15}{40}$ sind von $\frac{48}{40} = \frac{15}{48}$. Es sind daher $\frac{3}{8}$ von $1 + \frac{1}{5} = \frac{15}{48}$.

s) $3 + \frac{6}{7}$, wie viel mal $\frac{5}{7}$?

Antwort: $5 + \frac{2}{5}$ mal. Denn drei Ganze sind $3 \times 7 = \frac{21}{7}$; $6 + 21 = 27$; $\frac{27}{7}$ sind $5 + \frac{2}{5} \times \frac{5}{7}$.

Eben so kann man auch gewisse Theile von einem Ganzen abziehen, und mit dem zurückgebliebenen Reste vergleichen. Denke man sich, daß man z. B. $\frac{3}{5}$ von einem Ganzen abziehen wolle. Da das Ganze $\frac{5}{5}$ hat, so bleibt natür-

lich $\frac{2}{5}$ als Rest. Mit diesem Reste kann ich nach Willkühr verfahren, und ihn mit dem Ganzen oder den Theilen desselben vergleichen. Eben dasselbe wird der Fall seyn, wenn man ungleichartige Theile, z. B. $\frac{3}{5}$ und $\frac{1}{4}$, abzieht. $\frac{3}{5}$ sind $3 \times \frac{4}{20}$; $\frac{1}{4}$ ist $\frac{5}{20}$, das sind $\frac{17}{20}$. Hier ist der Rest des Ganzen $\frac{3}{20}$. Wäre z. B. die Frage: wie viel mal $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$ den Rest des Ganzen enthalten? so würde man diese $\frac{3}{20}$ mit den $\frac{17}{20}$ vergleichen müssen. Da die 3 in 17 fünf und $\frac{2}{3}$ mal enthalten ist, so ist es natürlich, daß auch der Rest eines Ganzen, welcher durch den Abzug der ebengenannten Theile entsteht, in diesen Theilen selbst 5 und $\frac{2}{3}$ mal enthalten sey. Dasselbe gilt natürlich auch von allen übrigen gleich- oder verschiedenartigen Theilen eines Ganzen.

Uebung.

Gleichartige Theile:

1 — $\frac{1}{3}$	Rest $\frac{2}{3}$.	1 — $\frac{1}{6}$	Rest $\frac{5}{6}$.
1 — $\frac{2}{3}$	Rest $\frac{1}{3}$.	1 — $\frac{5}{6}$	Rest $\frac{1}{6}$.
1 — $\frac{1}{4}$	Rest $\frac{3}{4}$.	1 — $\frac{1}{7}$	Rest $\frac{6}{7}$.
1 — $\frac{3}{4}$	Rest $\frac{1}{4}$.	1 — $\frac{2}{7}$	Rest $\frac{5}{7}$.
1 — $\frac{3}{5}$	Rest $\frac{2}{5}$.	1 — $\frac{3}{7}$	Rest $\frac{4}{7}$.
1 — $\frac{4}{5}$	Rest $\frac{1}{5}$.	u. s. f.	

Verschiedenartige Theile:

1 — $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, d. i. $\frac{5}{6}$, Rest $\frac{1}{6}$.
1 — $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, d. i. $\frac{7}{12}$, Rest $\frac{5}{12}$.
1 — $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$, d. i. $\frac{11}{12}$, Rest $\frac{1}{12}$.

$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$, d. i. $\frac{8}{15}$, Rest $\frac{7}{15}$.
$1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$, d. i. $\frac{11}{15}$, Rest $\frac{4}{15}$.
$1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{3}$, d. i. $\frac{14}{15}$, Rest $\frac{1}{15}$.
$1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{3}$, d. i. $\frac{10}{21}$, Rest $\frac{11}{21}$.
$1 - \frac{2}{7} + \frac{1}{3}$, d. i. $\frac{12}{21}$, Rest $\frac{9}{21}$.
$1 - \frac{3}{7} + \frac{1}{7}$, d. i. $\frac{16}{21}$, Rest $\frac{5}{21}$.
$1 - \frac{4}{7} + \frac{1}{3}$, d. i. $\frac{10}{12}$, Rest $\frac{2}{21}$.

[Es darf kaum erinnert werden, daß dieselbe Uebung auch mit andern Theilen vollbracht werden müsse. Man ziehe z. B. $\frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ ab. Da die Fünftel und Achtel in Vierzigstel sich auflösen, so wird der Rest aus Vierzigsteln bestehen. Da nun $\frac{3}{5}$ $3 \times 8 = \frac{24}{40}$ und $\frac{1}{8} = \frac{5}{40}$ hat, so werden dem Ganzen $\frac{29}{40}$ entzogen. Von $\frac{40}{40}$, welche als Inbegriff der Theile angesehen werden müssen, bleiben noch $\frac{11}{40}$; dies ist der Rest, welcher durch den Abzug von $\frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ entstanden ist.]

Aufgaben.

1) Wenn ich von einem Ganzen $\frac{3}{4}$ abziehe, so bleibt mir noch ein Rest; wie viel mal ist dieser Rest in den abgezogenen Theilen enthalten?

Antw. 3 mal. Denn ein Ganzes hat $\frac{4}{4}$; $\frac{3}{4}$ von $\frac{4}{4}$ abgezogen, bleibt $\frac{1}{4}$; ein Viertel ist in $\frac{3}{4}$ drei mal enthalten.

2) $\frac{3}{7} + \frac{1}{3}$, wie viel mal enthalten sie denjenigen Rest eines Ganzen, welcher nach ihrem Abzuge entstanden ist?

Antw. $2 + \frac{1}{2}$ mal. Denn $\frac{3}{7}$ sind $3 \times 3 = \frac{9}{21}$; $\frac{1}{3}$ hat $\frac{7}{21}$; dies zu dem Vorigen sind $\frac{15}{21}$; das Ganze hat $\frac{21}{21}$ oder $\frac{21}{21}$; von 15 bis 21 bleibt 6; 15 ist $2 + \frac{1}{2} \times 6$ oder der Rest des Ganzen.

3) Wenn ich von einem Ganzen $\frac{4}{9} + \frac{3}{7}$ abziehe, so bleibt mir noch ein Rest; wie viel enthält dieser Theile von $\frac{2}{3}$ dieses Ganzen?

Auflösung: Da $\frac{4}{9} + \frac{3}{7}$ in drei und Sechzigstel sich auflösen, und $\frac{4}{9}$ gleich sind $4 \times 7 = 28$; $\frac{3}{7}$ aber $3 \times 9 = 27$; $\frac{28 + 27}{63}$ aber $= \frac{55}{63}$ sind, so bleiben noch $\frac{8}{63}$ als Rest. Ein Drittel des Ganzen ist nun $\frac{21}{63}$; $\frac{2}{3}$ folglich $\frac{42}{63}$; $\frac{8}{63}$ ist von $\frac{42}{63} = \frac{8}{42}$. Es ist daher der durch den Abzug von $\frac{4}{9} + \frac{3}{7}$ entstandene Rest $\frac{8}{42}$ von zwei Dritteln desselben Ganzen.

4) $\frac{5}{7} + \frac{1}{6}$ von einem Ganzen abgezogen, wie viel mal ist der Rest in dem Ganzen selbst enthalten?

Antw. $8 + \frac{2}{5}$ mal. Denn $\frac{5}{7}$ sind $5 \times \frac{6}{8}$ oder $\frac{30}{42}$; $\frac{1}{6}$ hat $\frac{7}{42}$; $30 + 7 = 37$; der Rest ist $\frac{5}{42}$; das Ganze hat $\frac{42}{42}$, und dieses ist $8 + \frac{2}{5} \times \frac{5}{42}$, oder $8 + \frac{2}{5}$ mal der Rest des Ganzen, welcher durch den Abzug von $\frac{5}{7} + \frac{1}{6}$ entstanden ist.

Auf diese Weise bilden sich reine Verhältnisse der Zahlen. Aber man kann diese auch auf concrete Fälle anwenden. Es kann irgend eine Zahl ein Verhältniß zu einer andern haben, das mir bekannt, während mir die Zahl selbst, die dieses Verhältniß factisch darstellt, unbekannt ist. So kann ich wissen, daß 3 mit irgend einer unbekannten Zahl in einem Verhältnisse stehe; ich kann es wissen, daß sie der vierte Theil eines Ganzen ist. Wenn nun ein Viertel vier mal wiederholt werden muß, um $\frac{4}{4}$ oder ein Ganzes zu geben; so kann ich mir auch denken, daß die viermalige Wiederholung der Drei, d. i. 12, das gesuchte Ganze seyn müsse. Dies Verhältniß kann sich nicht ändern. Gesetzt, es betrage $\frac{1}{7} + \frac{1}{4}$ zusammen 30. Die Frage wäre, wie viel das Ganze

ausmache? Natürlich müßte ich hier vor allem darauf sehen, aus welchen und wie vielen aliquoten Theilen das Ganze bestehe, und wie viel solcher Theile vorhanden seyen. Da aus dem Vorigen bekannt seyn muß, daß Viertel und Siebentel sich in Acht und Zwanzigstel auflösen; so weiß man hier auch sogleich, daß $\frac{2}{2}\frac{8}{8}$ die aliquoten Theile des Ganzen seyn. Es ist nun noch die Frage, wie viel solcher Theile $\frac{1}{7} + \frac{1}{4}$ ausmachen? Dies ist ebenfalls leicht zu finden, da $\frac{1}{4}$ von 28 7, und $\frac{1}{7}$ $\frac{4}{28}$, beide also $\frac{11}{28}$ enthalten. Jetzt ist das Verhältniß bekannt. Diese $\frac{11}{28}$ müssen $2 + \frac{6}{11}$ mal wiederholt werden, um den Inbegriff aller Theile, oder $\frac{28}{28}$, zu geben. Nun gehören die vorhin erwähnten 30 den $\frac{11}{28}$ des Ganzen, welches ich aus den gegebenen Theilen suchen will. Wenn ich also die 30 eben so viel mal wiederhole, als ich die $\frac{11}{28}$ wiederholte, nämlich $2 + \frac{6}{11}$ mal, so werde ich natürlich auch dasjenige Ganze gefunden haben, von dem die 30 $\frac{11}{28}$ enthält; $2 \times 30 = 60$; $\frac{1}{11}$ von 30 ist $2 + \frac{8}{11}$; $\frac{6}{11}$ ist $6 \times 2 = 12 + 6 \times 8 = \frac{48}{11}$, d. i. $4 + \frac{4}{11}$; diese mit den vorigen $12 = 16\frac{4}{11}$ zu 60 giebt $76 + \frac{4}{11}$. Gehörte dieselbe Zahl aber dem Ganzen, und ich wollte den Betrag dieser beiden ungleichen Theile wissen, so würde ich natürlicher Weise $\frac{11}{28}$ von 30 suchen müssen. Da es sich ergiebt, daß $\frac{1}{28}$ von 30 $1 + \frac{2}{28}$, d. i. $1 + \frac{1}{14}$, ist, so würde ich natürlich sogleich schließen, daß $11 \times 1 + \frac{1}{14}$, das ist $11 + \frac{11}{14}$, die gesuchten $\frac{11}{28}$, oder $\frac{1}{5} + \frac{1}{7}$,

des Ganzen betragen. Nicht anders wird man verfahren, wenn man weiß, daß irgend eine Zahl ein aliquoter Theil eines Ganzen sey, und man nun einen andern kleinern oder größern Theil zu erfahren nöthig hat. Es sey z. B. 30 $\frac{1}{7}$; man wolle daraus den dritten Theil wissen. Da aus dem Vorigen bekannt ist, daß ein Drittel $\frac{7}{3}$ des Siebentels, also $2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{7}$ sey; so wird auch eine $2\frac{1}{3}$ malige Wiederholung der 30 den gesuchten dritten Theil geben; 2×30 ist aber 60; $\frac{1}{3}$ von 30 ist 10; dies zu 60 giebt 70 oder den Betrag des Drittels. Gehört aber diese 30 dem dritten Theile, so müßte man, um $\frac{1}{7}$ zu finden, $\frac{3}{7}$ von 30 suchen. Da $\frac{1}{7}$ von 30 $4\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ aber $3 \times 4 = 12$ und $3 \times 2 = \frac{6}{7}$, ist, so wäre $12 + \frac{6}{7}$ gleich dem 7ten Theile desjenigen Ganzen, von dem der dritte Theil 30 in sich faßt.

Uebung.

20 ist

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, das sind $\frac{5}{6}$. $1 = 1 + \frac{1}{5} \times \frac{5}{6}$; folgl. $1 + \frac{1}{5} \times 20$; $1 \times 20 = 20 + \frac{1}{5} \times 20 = 4$; $20 + 4 = 24$.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$. Ein Ganzes ist $1 + \frac{5}{7} \times \frac{7}{12}$; folglich $1 + \frac{5}{7} \times 20$; 1×20 ist 20; $\frac{1}{7}$ von 20 ist $2\frac{6}{7}$; $\frac{5}{7}$ ist $5 \times 2 + \frac{6}{7} = 10 + \frac{30}{7}$, d. i. $4\frac{2}{7}$ zu 10 sind $14\frac{2}{7}$ zu $20 = 34\frac{2}{7}$.

$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$. Ein Ganzes ist $8 + \frac{7}{8} \times \frac{8}{15}$; folglich $1 + \frac{7}{8} \times 20$; $1 \times 20 = 20$; $\frac{7}{8}$

von $20 = 7 \times 2 + \frac{1}{2} = 14 + \frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2}$ zu $20 = 37 + \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$. Ein Ganzes ist $2 + \frac{1}{10} \times \frac{10}{21}$; folglich $2 + \frac{1}{10} \times 20 = 40 + 2$ oder 42.

$\frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$. Ein Ganzes ist $2 + \frac{2}{11} \times \frac{11}{24}$; folglich $2 + \frac{2}{11} \times 20 = 40 + 3\frac{7}{11}$ oder $43\frac{7}{11}$.

$\frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30}$. Ein Ganzes ist $2 + \frac{4}{13} \times \frac{13}{30}$; folglich $2 + \frac{4}{13} \times 20 = 40 + 6\frac{2}{13}$, also $46\frac{2}{13}$ u. s. f.

Aufgaben.

a) 24 ist gleich dem siebenten Theile eines Ganzen, wie viel betragen $\frac{6}{7}$ desselben?

Antw. 144. Denn $\frac{6}{7}$ ist $6 \times \frac{1}{7}$; $\frac{1}{7}$ ist aber gleich 24; $\frac{6}{7}$ ist folglich $6 \times 24 = 144$.

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ist gleich der Summe 60, wie viel beträgt das Ganze?

Antw. 72. Denn $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ist $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{6}$ ist $1 + \frac{1}{5} \times \frac{5}{6}$; $\frac{5}{6}$ ist gleich 60; $\frac{6}{6}$ ist folglich $1 + \frac{1}{5} \times 60$, d. i. $60 + 12 = 72$.

c) 60 ist ein Ganzes, wie viel beträgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ dieser Zahl?

Antw. 50. Denn 60 ist das Ganze; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ist $\frac{5}{6}$. Da nun $\frac{1}{6}$ von 60 gleich ist 10; so sind $\frac{5}{6}$ $5 \times 10 = 50$.

d) Wenn $\frac{1}{7} + \frac{1}{5}$ der Summe 40 gleich ist, wie viel beträgt dann der Inhalt des Ganzen?

Antw. $116\frac{2}{3}$. Denn $\frac{1}{7} + \frac{1}{5}$ sind $\frac{12}{35}$. Das Ganze hat $\frac{35}{35}$, das sind $3 + \frac{11}{12} \times \frac{12}{35}$. Nun

sind 40 $\frac{2}{3}\frac{2}{5}$; das Ganze muß folglich 2 + $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ mal 40 seyn; 2 × 40 ist 80; $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ weniger als ein Ganzes; folglich $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ weniger als 1 × 40; $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ von 40 ist $3\frac{4}{1}\frac{4}{2}$; diese von 40 weg, bleiben $36\frac{8}{1}\frac{8}{2}$ oder $\frac{2}{3}$; dies zu 80 = $116\frac{2}{3}$.

e) $\frac{4}{9}$ betragen 50, wie viel $\frac{7}{8}$?

Antw. 98 + $\frac{1}{3}\frac{4}{2}$. Denn $\frac{4}{9}$ sind 4 × 8 + $\frac{3}{8}\frac{2}{8}$; $\frac{7}{8}$ sind 7 × 9 = $\frac{6}{8}\frac{3}{8}$; 63 ist 1 + $\frac{3}{3}\frac{1}{2}$ × 32, oder $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ weniger als 2 Ganze; $\frac{3}{6}\frac{2}{3}$ ist gleich 50; $\frac{6}{3}\frac{3}{2}$ ist folglich 1 × 50 und $\frac{3}{3}\frac{1}{2}$ × 50, oder $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ weniger als 2 × 50; $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ von 50 ist 1 + $\frac{1}{3}\frac{8}{2}$; diese weniger als 2 × 50, oder 100, bleibt 98 + $\frac{1}{3}\frac{4}{2}$.

f) Wenn ich von einem Ganzen $\frac{5}{7}$ abziehe, so bleibt mir noch ein Rest; dieser Rest ist gleich der Summe 70, wie viel beträgt das Ganze?

Antw. 175. Denn wenn ich $\frac{5}{7}$ von $\frac{7}{7}$ abziehe, so bleibt als Rest noch $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{7}$ ist 2 + $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$ × $\frac{2}{7}$; diese 70 ist gleich $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{7}$ ist folglich 2 + $\frac{1}{2}$ × 70; 2 × 70 = 140; $\frac{1}{2}$ von 70 ist 35; 140 und 35 ist 175.

g) Wenn ich von einem Ganzen $\frac{1}{7}$ und $\frac{3}{4}$ abziehe, so bleibt mir noch ein Rest; dieser Rest verhält *) sich zu dem Ganzen, wie sich die Zahl 17 verhält zu — welcher?

*) Bei dem Worte Verhalten hat man an eine Vergleichung zweier Zahlen mit einander zu denken, die an sich zwar verschieden, aber in Beziehung auf einander aliquote gleiche Theile unter sich fassen. Man sagt daher: 1 verhält sich zu 2, wie sich 3 zu 6 verhält; weil 1 eben so von der 2, als die 3 von der 6 die Hälfte ist. Wenn zwei Zahlen mit einander verglichen werden, so wird die niedere sogleich als Theil der höhern angesehen; indem nun daneben zwei andere bestehen, die in eben dem Verhältnisse stehen, von denen die niedere eben so viel aliquote Theile einer höhern enthält, so sagt man, die erste Zahl verhält sich zur zweiten, wie sich die dritte zur vierten verhält u. s. f.

Antw. $158\frac{2}{3}$. Denn $\frac{1}{7} + \frac{3}{4}$ sind $4 + 3 \times 7 = \frac{2}{2}\frac{5}{8}$; da das Ganze $\frac{2}{2}\frac{8}{8}$ hat, so bleiben noch $\frac{3}{2}\frac{}{8}$ als Rest; diese sind in dem Ganzen, das sind $\frac{2}{2}\frac{8}{8}$, $9 + \frac{2}{3}$ mal enthalten. Wenn nun $\frac{3}{2}\frac{}{8}$ 17 betragen, so sind $\frac{2}{2}\frac{8}{8}$ $9 + \frac{2}{3} \times 17$, das sind $153 + 5\frac{2}{3} = 158\frac{2}{3}$.

h) Wenn von einem Ganzen $\frac{4}{9} + \frac{2}{5}$ abgezogen wird, so bleibt noch ein Rest, der 40 betragen mag; wie viel würden $\frac{2}{3}$ ausmachen?

Auflösung: Da $\frac{4}{9} + \frac{2}{5}$ $20 + 18 = \frac{38}{45}$ des Ganzen ausmachen, so bleiben noch $\frac{7}{45}$ als Rest, der gleich ist der Summe 40. So viel aliquote Theile nun die $\frac{7}{45}$ von $\frac{2}{3}$ des Ganzen sind, so viel sind auch die 40 aliquote Theile einer erst zu suchenden unbekannten Zahl. Es muß also zuerst gesucht werden, wie viel Fünf und Vierzigstel $\frac{2}{3}$ enthalten. Da der dritte Theil von 45 gleich ist 15, so sind $\frac{2}{3}$ $2 \times 15 = 30$; $\frac{7}{45}$, oder der Rest, ist von $\frac{30}{45}$ $\frac{7}{30}$; also ist auch die Zahl 40 $\frac{7}{30}$ der zu suchenden unbekannten Zahl. So wie ich nun verfahren muß, um die 7 zu 30 zu erheben (nämlich sie $4 + \frac{2}{7}$ mal wiederholen), so muß ich auch verfahren, um die gesuchte unbekannte Zahl aus der 40, die $\frac{7}{30}$ von ihr ist, zu erhalten. Da nun $30\ 4 \times 7 + \frac{2}{7} \times 7$ ist, so ist auch $4 + \frac{2}{7} \times 40$ die gesuchte unbekannte Zahl; $4 + \frac{2}{7} \times 40$ ist $160 + 11\frac{3}{7}$, d. i. $171\frac{3}{7}$. Es verhält sich also der Rest eines Ganzen, welcher durch den Abzug von $\frac{4}{9} + \frac{2}{5}$ entsteht, zu $\frac{2}{3}$ des Ganzen, wie sich die Zahl 40 zu $171 + \frac{2}{7}$ verhält.

i) Wenn der Rest eines Ganzen, welcher durch den Abzug von $\frac{5}{8} + \frac{1}{3}$ entsteht, gleich ist der Summe 80, und ich zuerst $\frac{3}{10}$, dann $\frac{1}{4}$, und zuletzt noch $\frac{5}{7}$ von beiden (d. i. $\frac{1}{4} + \frac{3}{10}$) abziehe, wie viel wurde dann jedesmal dem Ganzen entzogen?

Auflösung: Da $\frac{5}{8} + \frac{1}{5} = \frac{33}{40}$ des Ganzen ist, so bleibt noch $\frac{7}{40}$ Rest; dieser ist gleich der Summe 80; $\frac{1}{4}$ hat $\frac{10}{40}$, d. i. $1 + \frac{3}{7} \times \frac{7}{40}$; der vierte Theil ist folglich $1 + \frac{3}{7} \times 80$; $1 \times 80 = 80$; $\frac{1}{7}$ von 80 ist $11\frac{3}{7}$; $\frac{3}{7}$, d. i. $3 \times 11 + \frac{3}{7} = 33 + \frac{9}{7}$, oder $1\frac{2}{7}$, das sind $34\frac{2}{7}$, zu 80 werden $114\frac{2}{7}$; dies ist also der Betrag des Viertels. Jetzt sollen noch $\frac{3}{10}$ gesucht werden. $\frac{1}{10}$ von $\frac{40}{40}$ ist $\frac{4}{40}$; $\frac{3}{10}$ ist folglich $3 \times 4 = \frac{12}{40}$; diese enthalten $1 + \frac{5}{7} \times \frac{7}{40}$; folglich auch $1 + \frac{5}{7} \times 80$; $1 \times 80 = 80$; $\frac{5}{7} = 5 \times 11 + \frac{3}{7} = 55 + \frac{15}{7}$, das sind $2\frac{1}{7}$, zusammen $57\frac{1}{7}$ zu 80 sind $137\frac{1}{7}$. Es bleiben noch übrig $\frac{5}{7}$ des Betrags dieser beiden Theile. Da beide Theile $12 + 8 = \frac{21}{40}$ machen, so sind es $\frac{5}{7}$ von 21, d. s. $5 \times 3 = \frac{15}{40}$; diese enthalten hinwiederum die 7 $2 + \frac{1}{7}$ mal; folglich muß die 80 $2 + \frac{1}{7}$ mal wiederholt werden. $2 \times 80 = 160$; $\frac{1}{7}$, d. i. $11\frac{3}{7}$, dies zu 160 giebt $171\frac{3}{7}$. Will ich nun noch den Inhalt der ganzen Summe wissen, so darf ich nur die 7 so viel mal wiederholen, als es nöthig ist, um aus ihr die 40 hervorgehen zu lassen; dies wäre $5 + \frac{5}{7}$ mal; $5 + \frac{5}{7} \times 80 = 400 + 57\frac{1}{7}$. Das Ganze muß also $457\frac{1}{7}$ betragen.

Probe: $457\frac{1}{7}$ ist das Ganze; $\frac{1}{4}$ von 45 ist $11\frac{1}{4}$, d. i. $112\frac{1}{2}$; ein Viertel von 7 ist $1 + \frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{28}$; dies zu $\frac{3}{4}$, das sind $3 \times 7 = \frac{21}{28}$ und $\frac{1}{28}$ werden $\frac{22}{28}$, d. i. $113\frac{1}{2}$ und $\frac{22}{28}$. Da aber $\frac{1}{2}$ hinwiederum $\frac{14}{28}$ ist, und diese mit 22 zusammen die $\frac{36}{28}$, d. i. $1\frac{8}{28}$ oder $\frac{2}{7}$, geben, so wird der vierte Theil seyn $114\frac{2}{7}$. Der vierte Theil ist demnach richtig. Es ist derselbe Versuch mit $\frac{3}{10}$ oder $\frac{12}{40}$ anzustellen. $\frac{1}{10}$ von 450 ist 45; $\frac{1}{10}$ von $7 = \frac{7}{10}$ und von $\frac{1}{7}$ ist $\frac{1}{70}$; $\frac{3}{10}$ ist folgl. $3 \times 45 + \frac{7}{10} + \frac{1}{70} = 135 + \frac{21}{10} + \frac{3}{70}$;

$\frac{2}{10}$ sind $2\frac{1}{10}$, das sind $\frac{7}{70}$; dies zu 3 giebt $\frac{10}{70}$, d. i. $\frac{1}{7}$; $2\frac{1}{7}$ zu 135 ist $137\frac{1}{7}$. Also ist auch diese Summe richtig. $\frac{5}{7}$ von $\frac{2}{40}$ oder $\frac{15}{40}$ des Ganzen war das dritte; $\frac{15}{40}$ sind $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{8}$ von $45 = 5\frac{5}{8}$; $\frac{3}{8}$ sind $3 \times 5 = 15 + \frac{15}{8}$, das sind $16 + \frac{7}{8}$; also $160 + \frac{7}{8}$ Zig; $8 + \frac{3}{4} = 168\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$ von 7 sind $3 \times 7 = \frac{21}{8}$, oder $2 + \frac{5}{8}$; dies zu dem Vorigen sind $170\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$, d. i. $1\frac{3}{8}$; dazu noch $\frac{1}{8}$ von $\frac{1}{7}$, d. i. $\frac{1}{56}$; $\frac{3}{8}$ sind $3 \times 7 = \frac{21}{56} + \frac{3}{56}$, zusammen also $1\frac{24}{56}$; dies zu 170 sind $171\frac{24}{56}$, oder $\frac{3}{7}$. Dies ist ebenfalls die vorhin gefundene Summe.

k) $\frac{4}{9} + \frac{3}{7}$ sind gleich der Summe 80, wie viel beträgt der Rest des Ganzen?

Auflösung: $\frac{4}{9} + \frac{3}{7}$ sind $28 + 27 = \frac{55}{63}$; der Rest ist 8; 8 ist aber von $55 = \frac{8}{55}$; folglich ist die Zahl zu suchen, welche $\frac{8}{55}$ von 80 enthält. $\frac{1}{55}$ von 80 ist $1\frac{25}{55}$, das sind $\frac{5}{11}$; $\frac{8}{55}$ von 80 ist folglich $8 \times 1 + \frac{5}{11} = 8 + \frac{40}{11}$, das sind $3 + \frac{7}{11}$; der Rest beträgt also $11 + \frac{7}{11}$.

Probe: Wenn ich aus den $\frac{55}{63}$ das Ganze hervorbringen will, so muß ich noch $\frac{8}{55}$ des Gegebenen, hingegen den Rest, oder $\frac{8}{63}$, $7 + \frac{7}{8}$ wiederholen. Nun sind $\frac{55}{63}$ gleich 80, und $\frac{8}{63}$ gleich $11\frac{7}{11}$. Wenn daher $1 + \frac{8}{55} \times 80$ dieselbe Summe giebt, als $7 + \frac{7}{8} \times 11 + \frac{7}{11}$, so hat die Probe die Richtigkeit des Verfahrens bewährt. $\frac{1}{55}$ von 80 ist $1\frac{5}{11}$; $\frac{8}{55}$ ist $11\frac{7}{11}$ zu 80 sind $91\frac{7}{11}$; $7 \times 11 + 7\frac{7}{11}$ sind $77 + \frac{49}{11}$, das sind $81 + \frac{5}{11}$. $\frac{7}{8} \times 11 + \frac{7}{11}$; $\frac{1}{8}$ von 11 ist gleich $1 + \frac{3}{8}$; $\frac{7}{8}$ ist folglich $7 \times 1 + 3 + 7 + \frac{21}{8}$, oder $2\frac{5}{8}$; also $9\frac{5}{8}$; $\frac{7}{8}$ von $\frac{7}{11} = \frac{49}{88}$, das sind $6 + \frac{1}{88}$; diese zu $\frac{7}{11}$ sind $13 + \frac{3}{11}$, oder $1 + \frac{21}{88}$;

dazu

Es sind also durch diese Operation folgende Zahlen gefunden worden: $81 + \frac{5}{11}$, $9\frac{5}{8}$, $6\frac{1}{2}\frac{1}{11}$; $81 + 9 = 90$; $\frac{5}{8} + \frac{5}{11} = 11\frac{7}{11}$ oder $1\frac{5}{8}\frac{7}{11}$; $\frac{7}{8}\frac{7}{11}$ machen mit $6\frac{1}{2}\frac{1}{11}$ gerade $\frac{7}{11}$; 1 und $\frac{7}{11}$ zu 90 macht $91\frac{7}{11}$. Die Probe bestätiget also die Richtigkeit des Resultates.

1) Wenn ich von einem Ganzen $\frac{5}{9}$ und $\frac{3}{8}$ abziehe, so bleibt mir noch ein Rest; dieser Rest ist gleich der Summe 50, wie viel werden folgende drei ungleiche Theile desselben Ganzen betragen? Der erste ist 16 mehr als der dritte, und der zweite ist 8 weniger als der erste.

Auflösung: $\frac{5}{9}$ sind $5 \times 8 = \frac{40}{80}$ oder $\frac{40}{72}$; $\frac{3}{8}$ sind $3 \times \frac{8}{9} = \frac{27}{72}$; $40 + 27 = 67$; das Ganze hat $\frac{72}{72}$; der Rest, welcher durch den Abzug von $\frac{67}{72}$ entsteht, ist also $\frac{5}{72}$; dieser Rest, das sind diese $\frac{5}{72}$, ist gleich der Summe 50; diese soll sich zu drei ungleichen Theilen des Ganzen verhalten; der erste ist 16 mehr als der dritte, folglich muß der dritte 16 weniger seyn als der erste; der zweite ist 8 weniger als der erste, folglich $16 - 8 = 8$ mehr als der dritte. Die Differenz zwischen dem ersten und dritten Theile ist 16, zwischen dem zweiten und dritten 8; $16 + 8 = 24$; diese Differenz der Totalsumme, d. i. 72, entzogen, bleibt 48; der Rest in drei gleiche Theile, ist $16 + 16 + 16$. Der dritte Theil ist der kleinste der zu suchenden ungleichen Theile des Ganzen, er ist 16; der erste ist 16 mehr als der dritte; $16 + 16$ ist 32; der zweite ist 8 mehr als der dritte; $8 + 16$ ist 24. So viel mal als jede Summe den Rest, oder die $\frac{5}{72}$, enthält, so viel mal wird die 50 wiederholt werden müssen. 32 ist $6 + \frac{2}{5} \times 5$; folglich $6 + \frac{2}{5} \times 50 = 300 + 20$. Der erste ungleiche Theil ist also 320. Die zweite Zahl

ist 24, d. i. $4 + \frac{4}{5} \times 5$; folglich $4 + \frac{4}{5} \times 50 = 200 + 40$. Der dritte Theil ist 16, d. i. $3 + \frac{1}{5} \times 5$; folglich $3 + \frac{1}{5} \times 50$, d. i. $150 + 10$. Die drei ungleichen Theile eines unbekannten Ganzen, dessen Rest $\frac{5}{72}$ der Summe 50 gleich ist, sind folglich $320 + 240 + 160$; das Ganze ist folglich 720.

[Sollte die Probe gemacht werden, so müßte nun dargethan werden, daß $\frac{5}{72}$ von 750 gleich ist der Zahl 50].

m) Wenn $\frac{6}{11}$ und $\frac{3}{8}$ dem Ganzen entzogen werden, so bleibt ein Rest; dieser verhält sich zu folgenden vier ungleichen Theilen des Ganzen, (der erste ist 7 weniger als der zweite; der dritte ist 9 mehr als der vierte, und dieser ist 10 mehr als der erste;) wie sich 100 zu welchen unbekannten Zahlen verhält?

Auflösung: $\frac{6}{11} + \frac{3}{8}$ sind $6 \times 8 + 3 \times 11 = \frac{81}{88}$; es bleiben also $\frac{5}{88}$ als Rest. Die Summe der Theile ist demnach 88. Da der erste Theil weniger als der zweite; der dritte den vierten, und dieser den ersten übersteigt, so ist der erste der kleinste Theil; er ist 7 weniger als der zweite; der Unterschied zwischen ihm und dem ersten Theile ist also 7; der vierte ist 10 mehr, der dritte ist $9 + 10$, d. i. 19, mehr. Die Differenzen sind also $7 + 19 + 10 = 36$; diese von 88 bleibt 52; der 4te Theil von 52 ist 13; der erste dieser ungleichen Theile beträgt demnach 13; der zwiete ist 7 mehr, folglich 20; der dritte ist 19 mehr; $19 + 13 = 32$; der vierte ist 10 mehr, d. i. 23. Der erste Theil, oder 13, ist $2 + \frac{3}{5} \times 5$; folglich $2 + \frac{3}{5} \times 100$, d. i. 260; der zweite ist 20, das ist 4×5; folglich 4×100 ist 400; der dritte ist 32, das ist $6 + \frac{2}{5} \times 5 = 640$; der vierte ist 23, d. i. $4 + \frac{3}{5} \times 5$; folglich $4 + \frac{3}{5} \times 100 = 460$

Die ungleichen Theile sind also 260 + 400 + 640 + 460.

§. 21.

Es ist schon oben (S. 113) angedeutet, daß man auch Theile irgend eines respectiven Ganzen beliebig wiederum zerspalten könne, die dann auch mit dem Ganzen selbst in einem nothwendigen Verhältnisse stehen. Wenn man von der Eins einen aliquoten Theil hat, so kann man auch leicht erfahren, der wievielste Theil dieser von einer andern größern Zahl sey, mit dem die Eins im Verhältniß steht. Ein Halb von Eins wird diesem zu Folge $\frac{1}{4}$ von 2, $\frac{1}{6}$ von 3, und $\frac{1}{8}$ von 4 seyn, weil die Eins von 2 ein Halb, von 3 ein Drittel, von 4 ein Viertel u. s. f. ist. Eben so wie $\frac{1}{4}$ von einem Drittel $\frac{1}{12}$ des Ganzen ist, so ist auch $\frac{1}{4}$ von Eins $\frac{1}{12}$ von Drei. Denn jede Eins muß nun in 4 gleiche Theile getheilt werden. Es findet hier also ganz dasselbe Verhältniß Statt. Denke man sich nun eine kleinere Zahl, z. B. 2, welche als Theile einer größern Zahl, z. B. der 5, aufgefaßt werden soll, so sieht man zunächst, daß es $\frac{2}{5}$ seyn. Will man nun z. B. $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{5}$ wissen, so hat man nur $\frac{1}{3}$ von 2 zu suchen, das sind $\frac{2}{3}$. Da die 2 aber $\frac{2}{5}$ sind, so ist der Betrag auch nur $\frac{2}{3}$ eines Fünftels. Will man diese auf das Ganze beziehen, so löset man $\frac{2}{5}$ in $5 \times \frac{2}{3}$, d. i. $\frac{2}{15}$, oder $\frac{1}{15}$ auf. Mithin ist auch $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{5}$ gleich $\frac{2}{15}$ des Ganzen. Ein Drittel

von $\frac{3}{5}$ ist nach eben dieser Regel $\frac{4}{15}$, oder $\frac{4}{15}$, und $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ wäre $2 \times 4 = \frac{8}{15}$, oder $\frac{8}{15}$ u. s. f. Wollte man aber den vierten Theil von $\frac{3}{5}$ auf das Ganze beziehen, so würde man $\frac{3}{20}$ erhalten. Denn ein Viertel von 3 ist $\frac{3}{4}$ von Eins. Diese Eins ist aber $\frac{1}{5}$ von 5; folglich sind die $\frac{3}{4}$ auch $\frac{3}{4}$ des Fünftels. Da nun das Ganze $\frac{5}{5}$ und jedes Fünftel $\frac{4}{4}$ hat, so sind es $5 \times 4 = \frac{20}{20}$. 3 ist aber von 20 $\frac{3}{20}$. Eben so sind $\frac{3}{4}$ von $\frac{3}{5}$ $3 \times 3 = \frac{9}{20}$ oder $\frac{9}{20}$. Wäre nun zu suchen, wie viel mal $\frac{3}{4}$ von $\frac{3}{5}$ in dem Ganzen enthalten sey, so würde man bald finden, daß die Frage mit einer andern, nämlich: 20, wie viel mal 9? gleichbedeutend sey. Nicht anders wird man verfahren, wenn andere Theile des Ganzen vorhanden sind. Ein Viertel von $\frac{5}{9}$ sind z. B. $\frac{5}{9}$. Da nun $\frac{1}{9}$ gleich ist $\frac{1}{36}$, so sind $\frac{5}{9}$ auch $\frac{5}{36}$. Sollen $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{9}$ gefunden werden, so multiplicirt man mit der Drei sogleich in die 5, und erhält dadurch $3 \times 5 = \frac{15}{9}$ oder $\frac{15}{36}$. Denn ein Viertel von 5 ist $\frac{5}{4}$. Drei Viertel muß folglich $3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$ seyn. Nun sind aber diese 5 selbst schon Neuntel des Ganzen; folglich sind die 15 nur Viertel-Neuntel oder Sechs und Dreißigstel desselben Ganzen. Eben so ergiebt sich, wenn man von $\frac{6}{7}$ drei Fünftel wissen will, die Summe von $\frac{18}{35}$. Denn $\frac{6}{7}$ sind gegeben; von diesen sind $\frac{3}{5}$ zu suchen. Es müssen daher $\frac{3}{5}$ von 6 zunächst gefunden werden. Da nun $\frac{1}{5}$ von 6 gleich ist $\frac{6}{5}$, so sind $\frac{3}{5}$ auch $3 \times 6 = \frac{18}{5}$. Nun sind diese 6 aber hin-

wiederum nur Siebentel des Ganzen; folglich sind diese $\frac{1}{5}\frac{8}{}$ auch nur Fünftel-Siebentel, oder $\frac{1}{3}\frac{8}{5}$ (denn $7 \times \frac{5}{5}$ sind $\frac{3}{3}\frac{5}{5}$). Die mechanische Regel ist hier also: Man multiplicirt diejenigen Zahlen, welche das Wieviele der Bruchtheile (die Zähler) ausdrücken, mit einander, und erhält dadurch die Summe der aliqueten Theile des Ganzen. Dasselbe thut man mit denjenigen Zahlen, die den Werth oder die Größe der Theile (die Nenner) ausdrücken, um die aliquoten Theile des Ganzen selbst zu finden. Es läßt sich aber auf jedem Punkte der Theile der Begriff eines Ganzen fixiren; daher ist es nicht nöthig, daß man gerade auf das absolute Ganze alles reducire. Wenn man $\frac{3}{5}$ von $\frac{5}{7}$ hat, und diese mit $\frac{7}{9}$ in Verhältniß setzt, so sieht man sogleich, daß $\frac{3}{5}$ von $\frac{5}{7}$ $\frac{3}{7}$ von $\frac{7}{9}$ in sich fassen; denn Fünftel von Fünf sind allezeit Siebentel von Sieben. Wenn man aber wissen will, wie viel drei Fünftel von $\frac{4}{9}$ Theile von $\frac{7}{9}$ enthalten, so wird man sogleich einsehen, daß hier ein jedes Neuntel in Fünftel aufgelöset werden müsse. Drei Fünftel von $\frac{4}{9}$ sind aber $3 \times 4 = \frac{12}{45}$, und $\frac{7}{9}$ sind $7 \times 5 = \frac{35}{45}$. Nun ist 12 von 35 $\frac{12}{35}$; folglich sind auch $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{9}$ $\frac{12}{35}$ von $\frac{7}{9}$. Von $\frac{8}{9}$ hingegen müssen es $\frac{12}{40}$, und von dem Ganzen, oder $\frac{9}{9}$, $\frac{12}{45}$ seyn. Was von diesen hier namentlich aufgeführten Beispielen gilt, das gilt auch von andern Zahlen und Verhältnissen, weil die Grün-

de immer dieselben bleiben. So bald mir aber bekannt ist, welche und wie viel Bestandtheile eine kleinere Zahl von einer größern enthält, so kann ich beide Zahlen auch nach Willkühr vergleichen und in Verhältnisse setzen.

Uebungen.

Halbe:

Ein Ganzes hat $\frac{2}{2}$.

Zwei Ganze sind 4 Halbe. Ein Halb von 1 ist $\frac{1}{4}$ von 2.

Drei Ganze sind $3 \times 2 = \frac{6}{2}$. $\frac{1}{2}$ ist von 6 $\frac{1}{6}$.

Vier Ganze sind $4 \times 2 = \frac{8}{2}$. $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{8}$ von $\frac{8}{2}$.

Fünf Ganze sind $5 \times 2 = 10$ Halbe. Ein Halb ist $\frac{1}{10}$ von 10 Halben.

Ein Halb ist daher $\frac{1}{3}$ von $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ von 2, $\frac{1}{5}$ von $2\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ von 3, $\frac{1}{7}$ von $3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ von 4, $\frac{1}{9}$ von $4\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$ von 5 u. s. f.

Drittel:

Ein Ganzes hat $\frac{3}{3}$. $1\frac{1}{3}$ sind $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{4}$ von $\frac{4}{3}$. $1\frac{2}{3}$ sind $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{5}$ von $\frac{5}{3}$.

Zwei Ganze sind $2 \times \frac{3}{3} = \frac{6}{3}$. $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{6}$ von $\frac{6}{3}$. $2\frac{1}{3}$ sind $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{7}$ von $\frac{7}{3}$. $2\frac{2}{3}$ sind $\frac{8}{3}$, $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{8}$ von $\frac{8}{3}$.

Drei Ganze sind $3 \times 3 = \frac{9}{3}$. $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{9}$ von $\frac{9}{3}$. $3\frac{1}{3}$ sind $\frac{10}{3}$, $\frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{10}$ von $\frac{10}{3}$ u. s. f.

Viertel:

Ein Ganzes hat $\frac{4}{4}$. $1\frac{1}{4}$ sind $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{5}$ von $\frac{5}{4}$, oder $1\frac{1}{4}$. $1\frac{2}{4}$ sind $\frac{6}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{6}$ von $\frac{6}{4}$. $1\frac{3}{4}$ sind $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{7}$ von $\frac{7}{4}$.

Zwei Ganze sind $2 \times 4 = \frac{8}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{8}$ von $\frac{8}{4}$ oder der 2 Ganzen. $2\frac{1}{4}$ sind $\frac{9}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{9}$ von $\frac{9}{4}$, oder $2\frac{1}{4}$. $2\frac{2}{4} = \frac{10}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{10}$ von $\frac{10}{4}$. $2\frac{3}{4}$ sind $\frac{11}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{11}$ von $\frac{11}{4}$.

Drei Ganze sind $3 \times 4 = \frac{12}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{12}$ von $\frac{12}{4}$. $3\frac{1}{4}$ sind $\frac{13}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{13}$ von $\frac{13}{4}$ u. s. f.

Fünftel:

Ein Ganzes hat $\frac{5}{5}$. $1\frac{1}{5}$ sind $\frac{6}{5}$, $\frac{1}{5}$ ist $\frac{1}{6}$ von $\frac{6}{5}$. $1\frac{2}{5}$ sind $\frac{7}{5}$, $\frac{1}{5}$ ist $\frac{1}{7}$ von $\frac{7}{5}$. $1\frac{3}{5}$ sind $\frac{8}{5}$, $\frac{1}{5}$ ist $\frac{1}{8}$ von $\frac{8}{5}$. $1\frac{4}{5}$ sind $\frac{9}{5}$, $\frac{1}{5}$ ist $\frac{1}{9}$ von $\frac{9}{5}$, oder $1\frac{4}{5}$. $\frac{1}{5}$ ist $\frac{1}{10}$ von zwei Ganzen.

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{2}{3 \times 3}$, oder $\frac{2}{9}$.
$\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ ist $2 \times 2 = \frac{4}{3 \times 3}$, oder $\frac{4}{9}$.

$\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{2}{4 \times 3}$ oder $\frac{2}{12}$, d. i. $\frac{1}{6}$.
$\frac{2}{4}$ von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{1}{3}$.
$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ ist $3 \times 2 = \frac{6}{4 \times 3}$ oder $\frac{6}{12}$, d. i. $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{5}$ von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{2}{5 \times 3}$ oder $\frac{2}{15}$.
$\frac{2}{5}$ von $\frac{2}{3}$ ist $2 \times 2 = \frac{4}{5 \times 3}$ oder $\frac{4}{15}$.
$\frac{3}{5}$ von $\frac{2}{3}$ ist $3 \times 2 = \frac{6}{5 \times 3}$ oder $\frac{6}{15}$, d. i. $\frac{2}{5}$.
$\frac{4}{5}$ von $\frac{2}{3}$ ist $4 \times 2 = \frac{8}{5 \times 3}$ oder $\frac{8}{15}$.

$\frac{2}{4}$

$\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{4}$ ist $\frac{1}{4}$ von $\frac{4}{4}$ oder 1.
$\frac{2}{3}$ v. $\frac{3}{4}$ sind $2 \times 3 = \frac{6}{4\,3}$ od. $\frac{6}{12}$, d. i. $\frac{1}{2}$ des Ganzen.

$\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ sind $\frac{3}{4\,3}$ oder $\frac{3}{12}$.
$\frac{2}{4}$ von $\frac{3}{4}$ sind $2 \times 3 = \frac{6}{4\,3}$ oder $\frac{6}{12}$, d. i. $\frac{1}{2}$.
$\frac{3}{4}$ von $\frac{3}{4}$ sind $3 \times 3 = \frac{9}{4\,3}$ oder $\frac{9}{12}$, d. i. $\frac{1}{4}$.

$\frac{1}{5}$ von $\frac{3}{4}$ sind $\frac{3}{4\,5}$ oder $\frac{3}{20}$.
$\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}$ sind $2 \times 3 = \frac{6}{4\,5}$ oder $\frac{6}{20}$, d. s. $\frac{3}{10}$.
$\frac{3}{5}$ von $\frac{3}{4}$ sind $3 \times 3 = \frac{9}{4\,5}$ oder $\frac{9}{20}$.
$\frac{4}{5}$ von $\frac{3}{4}$ sind $4 \times 3 = \frac{12}{4\,5}$ oder $\frac{12}{20}$, d. s. $\frac{3}{5}$.

[Man kann dies nach Gefallen weiter ausdehnen. Das Lokalbedürfniß der Zöglinge muß hier die Uebungen leiten. Noch ein Beispiel möge indeß hier einen Platz finden.]

$\frac{8}{9}$

$\frac{1}{7}$ von $\frac{8}{9}$ sind $\frac{8}{7\,9}$ oder $\frac{8}{63}$.
$\frac{2}{7}$ von $\frac{8}{9}$ sind $2 \times 8 = \frac{16}{7\,9}$ oder $\frac{16}{63}$.
$\frac{3}{7}$ von $\frac{8}{9}$ sind $3 \times 8 = \frac{24}{7\,9}$ oder $\frac{24}{63}$, d. s. $\frac{8}{21}$.
$\frac{4}{7}$ von $\frac{8}{9}$ sind $4 \times 8 = \frac{32}{7\,9}$ oder $\frac{32}{63}$.
$\frac{5}{7}$ von $\frac{8}{9}$ sind $5 \times 8 = \frac{40}{7\,9}$ oder $\frac{40}{63}$.
$\frac{6}{7}$ von $\frac{8}{9}$ sind $6 \times 8 = \frac{48}{7\,9}$ oder $\frac{48}{63}$.

$\frac{1}{5}$ von $\frac{8}{9}$ sind $\frac{8}{5\,9}$ oder $\frac{8}{45}$.
$\frac{1}{4}$ von $\frac{8}{9}$ sind $\frac{8}{4\,9}$ oder $\frac{2}{9}$.
$\frac{1}{2}$ von $\frac{8}{9}$ sind $\frac{8}{2\,9}$ oder $\frac{8}{27}$ u. s. f.

Aufgaben.

a) $\frac{3}{4}$ von 3×4, wie viel sind es Theile von 1×4?

Antw. $\frac{2}{4}$. Denn $\frac{1}{4}$ von 3×4 ist $\frac{3}{4} \times 4$; $\frac{3}{4}$ von 3×4 sind $3 \times 3 = \frac{9}{4} \times 4$. Es enthält daher auch $\frac{3}{4}$ von 3×4 $2\frac{1}{4}$ mal ein mal 4.

b) $\frac{3}{4}$ von 3×4, wie viel sind es Theile von 2×4?

Antw. $\frac{2}{8}$. Denn $\frac{3}{4}$ von 3×4 sind $3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$; 2×4 sind $\frac{8}{4}$ von 1×4; $\frac{9}{4}$ sind $\frac{2}{8} \times \frac{8}{4}$; oder $\frac{3}{4}$ von 7×4 enthalten $1\frac{1}{8}$ mal 2×4.

c) $\frac{3}{4}$ von 3×4, wie viel sind es Theile von 5×4?

Antw. $\frac{9}{20}$. Denn $\frac{3}{4}$ von 3×4 sind drei mal drei oder $\frac{9}{4}$; 5×4 sind 20; 9 ist von 20 $\frac{9}{20}$.

d) $\frac{3}{5}$ von 2×5, wie viel sind es Theile von 1×5?

Antw. $\frac{6}{5}$, oder $1\frac{1}{5}$. Denn $\frac{3}{5}$ von 2×5 sind $3 \times 2 = \frac{6}{5}$ von 1×5; $\frac{6}{5}$ ist aber $1 + \frac{1}{5}$.

e) $\frac{3}{5}$ von 4×5, wie viel sind es Theile von 7×5?

Antw. $\frac{12}{35}$. Denn $\frac{3}{5}$ von 4×5 sind $3 \times 4 = \frac{12}{5}$; 7×5 sind aber $\frac{35}{5}$; nun ist 12 von 35 $\frac{12}{35}$.

f) $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$, wie viel sind es Theile des Ganzen?

Antw. $\frac{1}{2}$. Denn $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ sind $\frac{2}{4}$, d. i. $\frac{1}{2}$.

g) $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$, wie viel Theile des Ganzen?

Antw. $\frac{8}{15}$. Denn $\frac{2}{3}$ von 4 sind $2 \times 4 = \frac{8}{3}$; das Ganze hat $\frac{5}{5}$, das sind $5 \times \frac{3}{5} = \frac{15}{5}$; 8 ist von 15 $\frac{8}{15}$.

h) $\frac{3}{4}$ von $\frac{7}{9}$, wie viel sind es Theile des Ganzen?

Antwort: $\frac{21}{36}$. Denn drei Viertel von 7 sind $3 \times 7 = 21$ Viertel. Nun sind die 7 aber

Neuntel des Ganzen, folglich sind es $\frac{21}{4}$ der Neuntel. Da nun $\frac{9}{9}$, oder ein Ganzes, $9 \times \frac{4}{4} = 36$ Viertel-Neuntel haben muß, so sind $\frac{3}{4}$ von $\frac{7}{9}$ $\frac{21}{36}$ des Ganzen.

i) Ein Ganzes, wie viel mal enthält es $\frac{3}{5}$ von $\frac{6}{7}$?

Antw. $1\frac{17}{18}$ mal. Denn drei Fünftel von sechs Siebenteln sind $3 \times 6 = \frac{18}{35}$, oder $\frac{18}{35}$; das Ganze hat $\frac{35}{35}$, und dieses ist $1\frac{17}{18}$ mal $\frac{18}{35}$.

k) Ein Ganzes, wie viel mal enthält es $\frac{4}{7}$ von $\frac{5}{9}$?

Antw. $3\frac{3}{20}$. Denn $\frac{4}{7}$ von $\frac{5}{9}$ sind $4 \times 5 = \frac{20}{63}$, oder $\frac{20}{63}$; das Ganze hat $\frac{63}{63}$, und dieses ist $3\frac{3}{20}$ mal $\frac{20}{63}$. Es enthält demnach das Ganze $3\frac{3}{20}$ mal $\frac{4}{7}$ von $\frac{5}{9}$.

l) $\frac{3}{8}$ von $\frac{7}{9}$, wie viel sind es Theile von $\frac{5}{9}$?

Antw. $\frac{21}{40}$. Denn $\frac{3}{8}$ von $\frac{7}{9}$ sind $3 \times 7 = \frac{21}{72}$; $\frac{5}{9}$ sind $5 \times 8 = \frac{40}{72}$; 21 ist von 40 $\frac{21}{40}$. Es sind daher auch $\frac{3}{8}$ von $\frac{7}{9}$ $\frac{21}{40}$ von $\frac{5}{9}$.

m) $\frac{3}{7}$ von $\frac{9}{11}$, wie viel mal sind sie enthalten in $\frac{6}{7}$ des Ganzen?

Antwort: $2\frac{12}{27}$ mal. Denn $\frac{3}{7}$ von $\frac{9}{11}$ sind $3 \times 9 = \frac{27}{77}$; $\frac{1}{7}$ hat $\frac{11}{77}$; $\frac{6}{7}$ sind $7 \times 11 = \frac{66}{77}$; dies ist aber $2\frac{12}{27}$ mal $\frac{27}{77}$. Es enthalten demnach $\frac{6}{7}$ $2\frac{12}{27}$ mal $\frac{3}{7}$ von $\frac{9}{11}$.

n) $\frac{7}{8}$ von $\frac{9}{10}$, wie viel sind es Theile von $1\frac{2}{5}$?

Antw. $\frac{63}{112}$. Denn $\frac{7}{8}$ sind $7 \times 9 = \frac{63}{80}$; jedes Zehntel hat $\frac{8}{80}$; ein Ganzes hat $\frac{10}{10}$, das sind $10 \times 8 = \frac{80}{80}$; $\frac{2}{5}$ sind $2 \times 2 = \frac{4}{10}$; folglich auch noch $4 \times 8 = \frac{32}{80}$; 32 zu 80 sind 112; 63 ist von 112 $\frac{63}{112}$. Es sind daher auch $\frac{7}{8}$ von $\frac{9}{10}$ $\frac{63}{112}$ von $1\frac{2}{5}$.

o) 40 ist $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{9}$, wie viel beträgt das Ganze?

Antw. 150. Denn $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{9}$ sind $3 \times 4 = \frac{12}{45}$; das Ganze hat $9 \times 5 = \frac{45}{45}$; dies ist aber $3\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4} \times 12$; 12 ist gleich der Summe 40; 45 wird daher seyn $3 + \frac{3}{4} \times 40$; 3×40 ist 120; $\frac{3}{4}$ von 40 ist $3 \times 10 = 30$; $120 + 30 = 150$.

Probe: Da die 150 dasjenige Ganze ist, welches aus der $3\frac{3}{4}$ maligen Wiederholung der $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{9}$ entstanden ist, so muß auch $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{9}$, oder $\frac{12}{45}$ von 150, wiederum 40 geben. Nun ist $\frac{1}{45}$ von 150 $3\frac{15}{45}$, d. i. $\frac{1}{3}$; $\frac{12}{45}$ ist folglich $12 \times 3 = 36$, und $12 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{3}$, das sind vier Ganze; diese zu 36 giebt 40.

p) Ein Ganzes ist gleich der Summe 200, wie viel betragen $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{7}$?

Antw. $107\frac{1}{7}$. Denn $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{7}$ sind $3 \times 5 = \frac{15}{47}$, oder $\frac{15}{28}$; das Ganze hat $\frac{28}{28}$; dieses ist also gleich der Summe 200; $\frac{15}{28}$ sind folglich $\frac{15}{28}$ von 200; $\frac{1}{28}$ von 200 ist $\frac{1}{14}$ von 100, und dieses ist $7\frac{2}{14}$ oder $\frac{1}{7}$; $\frac{15}{28}$ ist folglich $15 \times 7\frac{1}{7} = 105\frac{15}{7}$ oder $2\frac{1}{7}$; $105 + 2\frac{1}{7} = 107\frac{1}{7}$. Wenn also das Ganze 200 ist, so betragen $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{7}$ $107\frac{1}{7}$.

Probe: Wenn die Summe $107\frac{1}{7}$ gleich ist $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{7}$, oder $\frac{15}{28}$, so muß auch das Ganze, hier 200, auf eben die Weise durch die Wiederholung der Theile entstehen, als 28 aus 15 entsteht; 28 entsteht aber durch die 1 und $\frac{13}{15}$ malige Wiederholung der 15; folglich muß auch $1\frac{13}{15}$ mal $107\frac{1}{7}$ seyn. Da hier $\frac{13}{15}$ von $107\frac{1}{7}$ gesucht werden soll, so thut man am besten diese $107\frac{1}{7}$ in Siebentel aufzulösen. $\frac{1}{7}$ 7 $\times$ $107\frac{1}{7}$ sind aber 750

Siebentel; $\frac{1}{15}$ von 750 ist 50; $\frac{13}{15}$ ist $13 \times 50 = \frac{650}{7} + 750 = \frac{1400}{7}$, und dies sind 200 Ganze.

q) $\frac{3}{7}$ von $\frac{5}{9}$ verhalten sich zu $\frac{2}{3}$ des Ganzen, wie sich 50 zu welcher Zahl verhält?

Antw. 140. Denn $\frac{3}{7}$ von $\frac{5}{9}$ sind $3 \times 5 = \frac{15}{63}$, $\frac{2}{3}$ sind $2 \times 3 = \frac{6}{9}$; jedes Neuntel hat $\frac{7}{7}$; $\frac{6}{9}$ sind folglich $6 \times 7 = \frac{42}{63}$; 42 ist $2 + \frac{12}{15}$, das sind $\frac{4}{5} \times 15$; $\frac{15}{63}$ ist gleich 50; $\frac{42}{63}$ ist folglich $2 + \frac{4}{5} \times 50 = 100 + 40$. Es verhalten sich demnach $\frac{3}{7}$ von $\frac{5}{9}$ zu $\frac{2}{3}$ des Ganzen, wie sich die Zahl 50 zu 140 verhält.

[Wenn man sich durch eine Probe von der Richtigkeit dieses Verhältnisses überzeugen will, so muß man die gefundene Zahl als die gegebene, und umgekehrt die gegebene als die zu findende betrachten. Vorher fand man die 140 aus der 50 durch die Ueberlegung, daß sie in demselben Verhältnisse steht, als $\frac{3}{7}$ von $\frac{5}{9}$ zu $\frac{2}{3}$ des Ganzen, oder 15 zu 42. Wenn ich jetzt umgekehrt auch finde, daß $\frac{15}{42}$ von 140 die Zahl 50 giebt, so darf die Richtigkeit dieses Verhältnisses nicht mehr bezweifelt werden. $\frac{1}{42}$ von 140 ist $3\frac{4}{42}$ oder $\frac{1}{3}$; $\frac{15}{42}$ ist folglich $15 \times 3 + \frac{1}{3} = 45 + \frac{15}{3}$, d. i. 5; $45 + 5 = 50$.]

r) $\frac{3}{8}$ von $\frac{5}{9}$ verhält sich zu $1\frac{1}{4}$, wie sich 20 zu?

Auflösung: $\frac{3}{8}$ von $\frac{5}{9}$ sind $3 \times 5 = \frac{15}{90}$; ein Ganzes hat $\frac{9}{9}$, also $9 \times 8 = \frac{72}{90}$; ein Viertel hat $2\frac{1}{4}$, das sind folglich $2 + \frac{1}{4} \times 8 = 16 + 2$ oder $\frac{18}{90}$; diese zu 72 giebt $\frac{90}{90}$; 90 ist aber 5×15. Da nun $\frac{15}{90}$ der Zahl 20 gleich ist, so muß 5×20 auch gleich seyn $\frac{90}{90}$; 5×20 ist 100. Es verhalten sich demnach $\frac{3}{8}$ von $\frac{5}{9}$ zu $1\frac{1}{4}$, wie sich 20 zu 100 verhält.

§. 22.

Wenn eine gewisse Anzahl von Ganzen und einigen aliquoten Theilen verglichen werden sollen, so muß zuvörderst alles in aliquote gleiche Theile umgesetzt werden, damit dann ein richtiges Verhältniß vermittelt werden könne. Sind z. B. $2\frac{2}{3}$ mit 7 zu vergleichen, so ergiebt sich sogleich, daß die erste Zahl von der letztern $2\frac{7}{7}$ enthalte. Da aber Drittel-Siebentel Ein und Zwanzigstel des Ganzen sind, so muß, so bald ein einfaches Verhältniß dieser Theile zu dem Ganzen wirklich vermittelt werden soll, alles in Drittel-Siebentel oder Ein und Zwanzigstel umgesetzt werden. Die 7 werden 7×3 Drittel-Siebentel, das sind ein und zwanzig Ein und Zwanzigstel. Da nun $2\frac{2}{3}$ Acht-Drittel-Siebentel machen, so stehen diese in demselben einfachen Verhältnisse, in welchem 8 zu 21 stehet. Sind nun in dem folgenden Gliede auch Theile, so werden diese auf gleiche Weise behandelt. Betrüge die letzte, oder größte Zahl, nämlich die 7, noch $\frac{1}{3}$ mehr, so würde sich $\frac{22}{3}$ als die Totalzahl ergeben, mit denen die 8 im Verhältnisse steht. Von $7\frac{1}{3}$ sind also $2\frac{2}{3} = \frac{8}{22}$ von $7\frac{2}{3}$ müßten sie $\frac{8}{23}$ seyn u. s. f. Es kann aber auch die größere Zahl gebrochen seyn, während die kleinere nur aus Ganzen besteht. Dann wird man nicht gerade genöthigt seyn, in jedem Falle alles in aliquote gleiche Theile aufzulösen, sondern die gebrochenen Theile der größern Zahl werden dann nur mit aliquoten gleichen

Theilen der kleinern verglichen. Wenn z. B. die Frage wäre: $2\frac{1}{3}$, wie viel mal zwei, so sieht man, daß hier nur ein Drittel von Eins mehr ist. Da nun Eins von Zwei ein Halbes ist, so ist auch dies Drittel nur ein Drittel des Halben, d. i. $\frac{1}{6}$; $2\frac{1}{3}$ ist folglich $1 + \frac{1}{6} \times 2$. Soll die Zwei durch $3\frac{1}{3}$ wiederholt werden, so sieht man, daß Drei die Zwei $1 + \frac{1}{2}$ mal enthalte; nun ist wiederum $\frac{1}{3}$ da, das ist $\frac{1}{3}$ des Halben, oder $\frac{1}{6}$; $3 + \frac{1}{3}$ ist also $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 2$. Da nun $\frac{1}{2}$ gleich ist $\frac{3}{6}$, so sind $1 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$. Es enthält demnach $3\frac{1}{3}$ die Zwei $1 + \frac{4}{6}$ oder $1\frac{2}{3}$tel mal. Die unmittelbarste und einfachste Verbindung der Zahlen ist allezeit die vorzüglichste, und eben deshalb auch die verständlichste. Man wird nie fehlen, wenn man sich sogleich an die concreten Zahlen hält, das Verhältniß derselben genau beachtet, und darnach verfährt.

Uebungen.

$1\frac{1}{2}$ sind $\frac{3}{2}$; 5 Ganze sind $5 \times 2 = \frac{10}{2}$; $\frac{3}{2}$ ist von $\frac{10}{2} = \frac{3}{10}$.

2 sind $= 2 \times 2 = 4$; $5\frac{1}{2}$ sind $\frac{11}{2}$; $\frac{4}{2}$ sind von $\frac{4}{11}$ $\frac{11}{2}$.

$2\frac{1}{2}$ sind $\frac{5}{2}$; $5\frac{1}{2}$ sind $\frac{11}{2}$ u. s. f.

$2\frac{1}{3}$ sind $\frac{7}{3}$; $5 = 5 \times 3 = \frac{15}{3}$; $\frac{7}{3}$ ist von $\frac{15}{3}$ $\frac{7}{15}$ u. s. w.

$2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$; 4 sind $4 \times 4 = \frac{16}{4}$; $\frac{9}{4}$ sind von $\frac{16}{4}$ $\frac{9}{16}$.

[Was in den angeführten Beispielen von Halben, Dritteln u. s. f. gilt, das muß auch von allen andern aliquoten Theilen des Ganzen Gültigkeit haben. Nur aliquote gleiche Zahlen können in einfache Verhältnisse gebracht werden; aliquote ungleiche Theile hingegen stehen zwar auch in einem nothwendigen Verhältnisse, aber ihre Vergleichung ist allezeit complicirter, indem sie eine doppelte Vergleichung gebrochener Zahlen erfordert, wie weiter unten erhellen wird.]

Aufgaben.

a) $3\frac{1}{4}$, wie viel sind es Theile von 5?

Antw. $3\frac{1}{4}\frac{3}{5}$ oder $\frac{13}{20}$. Denn 3 ist von 5 $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{4}$ ist von 5 $\frac{1}{4}\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$ sind $3 \times 4 = \frac{12}{5}$; $\frac{12+1}{4} = \frac{13}{5}$ oder $\frac{13}{20}$.

b) 4 Ganze, wie viel sind es Theile von $7\frac{2}{5}$?

Antw. $\frac{20}{37}$. Denn $7\frac{2}{5}$ sind $\frac{37}{5}$; 4 Ganze sind $4 \times 5 = \frac{20}{5}$; 20 ist von 37 $\frac{20}{37}$.

c) 8, wie viel mal $3\frac{2}{3}$?

Antw. $2\frac{2}{11}$ mal. Denn 8 Ganze sind $8 \times 3 = \frac{24}{3}$; $3\frac{2}{3}$ sind $\frac{11}{3}$; 24 ist $2\frac{2}{11} \times 11$; folglich sind auch 8 Ganze $2 + \frac{2}{11} \times 3\frac{2}{3}$.

d) $9\frac{3}{7}$, wie viel mal sind es 4?

Auflösung: 9 ist $2\frac{1}{4} \times 4$; $\frac{3}{7}$ von Einem ist $\frac{3}{28}$ von 4; folglich sind 9 $2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{28}$ mal 4. Da $\frac{1}{4}$ $\frac{7}{28}$ hat, so geben diese mit den schon vorhandenen $\frac{3}{28}$ $\frac{10}{28}$, das sind $\frac{5}{14}$. Es ist daher $9\frac{3}{7}$ $2 + \frac{5}{14} \times 4$.

e) $8\frac{5}{8}$, wie viel mal $3\frac{1}{4}$?

Antw. $2\frac{17}{26}$. Denn $8\frac{5}{8}$ sind $\frac{69}{8}$; 3 Ganze sind $3 \times 8 = \frac{24}{8}$; $\frac{1}{4}$ hat $\frac{2}{8}$; $24 + 2 = 26$; 69 ist $2\frac{17}{26}$ mal 26; folglich sind auch $8\frac{5}{8}$ $2\frac{17}{26}$ mal $3\frac{1}{4}$.

f) Fünf verhält sich zu $12\frac{1}{3}$, wie sich 30 zu einer unbekannten Zahl verhält?

Aufl. Da 5 mit $12\frac{1}{3}$ in eben dem Verhältnisse steht, als die 30 mit der unbekannten Zahl, so muß durch das gegebene bekannte Verhältniß das unbekannte gefunden werden, so wie ich die Fünf behandeln muß, um aus ihr $12\frac{1}{3}$ zu bilden, so werde ich auch die 30 behandeln müssen, um diejenige Zahl zu erfahren, die gerade eben so viel aliquote Theile mehr ist, als $12\frac{1}{3}$ in Vergleichung mit 5; $12\frac{1}{3}$ ist aber $2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{15} \times 5$; $\frac{2}{5}$ sind $2 \times 3 = \frac{6}{15}$; dazu noch $\frac{1}{15}$ sind $\frac{7}{15}$ oder $\frac{7}{15}$. Es ist also $12\frac{1}{3}$ $2 + \frac{7}{15} \times 5$. Die unbekannte Zahl wird sich also ergeben, wenn ich die 30 $2 + \frac{7}{15}$ mal wiederhole; $2 \times 30 = 60$; $\frac{1}{15}$ von 30 ist 2; $\frac{7}{15}$ ist $7 \times 2 = 14$; $14 + 60 = 74$. Es verhält sich demnach 5 zu $12\frac{1}{3}$, wie sich 30 zu 74 verhält.

Probe: Hier hat man gerade auf eine umgekehrte Weise zu verfahren. Man setzt nämlich die gefundene Zahl 74 als die gegebene, die mit einer unbekannten Zahl in eben dem Verhältnisse stehen soll, als $12\frac{1}{3}$ zu 5. Wenn sich bei diesem Verfahren ebenfalls die Zahl 30 ergiebt, so bewährt sich die Richtigkeit der Rechnung. Es ist zuerst zu sehen, wie viel Theile die 5 von $12\frac{1}{3}$ enthält; $12\frac{1}{3}$ sind $\frac{37}{3}$; $5 = 5 \times 3 = \frac{15}{3}$; 15 ist von 37 $\frac{15}{37}$. Es ist also diejenige Zahl zu suchen, die von 74 ebenfalls $\frac{15}{37}$ enthält; $\frac{1}{37}$ von 74 ist 2; $\frac{15}{37}$ ist folglich $15 \times 2 = 30$. Es ergiebt sich also dieselbe Zahl, die oben gegeben war.

g) $4\frac{3}{7}$ ist gleich der Summe 80; welche Summe wird der 12 gleich seyn?

Antw.

Antw. $216\frac{24}{31}$. Denn $4\frac{3}{7}$ sind $4 \times 7 = \frac{28}{7}$; $\frac{3+28}{7} = \frac{31}{7}$; 12 ist $12 \times 7 = \frac{84}{7}$; 84 ist $2 + \frac{22}{31} \times 31$; folglich ist die unbekannte Zahl $2 + \frac{22}{31}$ mal 80; $2 \times 80 = 160$; $\frac{1}{31}$ von 80 ist $2\frac{18}{31}$; $\frac{2}{31}$ sind $2 \times 2 + 18 = 4 + \frac{36}{31}$, das ist $5 + \frac{5}{31}$; 22 ist 11×2; folglich $11 \times 5 + \frac{5}{31} = 55 + \frac{55}{31}$; das letztere ist $1\frac{24}{31}$; dies zu $55 = 56\frac{24}{31}$ zu 2×80, oder 160, ist $216 + \frac{24}{31}$.

[Auf diese Weise sucht man sich zu helfen, wenn man die Zahlen nicht allzu sehr anhäufen will. Man vermehrt nämlich zuerst nur in so weit, als nöthig ist, um einige Ganze zu finden. Wenn hier die $\frac{18}{31}$ durch 22 erst multiplicirt worden wären, so wäre die Rechnung ungleich complicirter geworden. Aber da die Verdoppelung der $\frac{18}{31}$ $1\frac{5}{31}$ giebt, so darf man sich hier nur daran halten, daß $\frac{2}{31}$ von 80 $5 + \frac{5}{31}$ geben. 22×1 ist aber nur 11×2; folglich können $5\frac{5}{31}$ auch nur 11 mal genommen werden. Diese Fälle treten öfter ein; aber es ist nie schwierig, den Weg zu finden, es sich zu erleichtern. Wäre in dem vorgekommenen Falle $\frac{23}{31}$ von 80 zu suchen gewesen, so würde man eins durchgelassen, und erst, nachdem $\frac{22}{31}$ von 80 auf obige Weise gefunden worden wären, das drei und zwanzigste Ein und Dreißigstel von 80, das hier $2\frac{18}{31}$ faßt, der gefundenen Summe beigefügt haben. Vergl. §. 15. S. 46 folg.]

Die gegebene Zahl muß nicht nothwendig aus einem oder mehreren Ganzen zusammengesetzt seyn, sondern es kann eben so wohl eine gewisse Anzahl von aliquoten Theilen seyn, die man dann, wenn sie vermehrt werden, in Ganze umsetzen kann. Man denke sich z. B. $\frac{3}{4}$ als gegeben; es werde gefordert, daß diese dreimal genommen werden soll, so würde man $3 \times 3 = \frac{9}{4}$ bekommen. Dies ist aber schon $2\frac{1}{4}$ Ganze. Wäre nun das Verhältniß gegeben: 3 zu 11, wie $\frac{9}{7}$ zu einer unbekannten Zahl, so würde

man zuerst bemerken, daß 3 von 11 $\frac{3}{11}$ sey; $\frac{6}{7}$ sind folglich von der unbekannten Zahl ebenfalls $\frac{3}{11}$. Da die Drei $3\frac{2}{3}$ mal wiederholt werden muß, um aus ihr die 11 hervor zu bringen, so wird auch eine $2\frac{2}{3}$ malige Wiederholung der $\frac{6}{7}$ diejenige Zahl geben, von welcher $\frac{6}{7}$ $\frac{3}{11}$ sind. $3\frac{2}{3} \times 6 = 2\frac{2}{7}$, das sind $3\frac{1}{7}$. Es verhält sich also 3 zu 11, wie $\frac{6}{7}$ zu $3\frac{1}{7}$.

h) 3 verhält sich zu $13\frac{1}{4}$, wie sich $\frac{3}{5}$ zu wie viel Ganzen verhält?

Antw. $2\frac{13}{20}$. Denn $13\frac{1}{4}$ ist $4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times 3$; $\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$; $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$; $\frac{4+1=5}{12}$; $13\frac{1}{4}$ ist also $4 + \frac{5}{12} \times 3$; 3 ist gleich $\frac{3}{5}$; $13\frac{1}{4}$ ist folglich $4 + \frac{5}{12} \times \frac{3}{5}$; $4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$; $\frac{1}{12}$ von $\frac{3}{5}$ ist $\frac{12}{5}$ oder $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{12}$ ist folglich $5 \times \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$; dies zu $\frac{12}{5} = 13\frac{1}{4}$; $13\frac{1}{4}$ ist $2 + 3\frac{1}{4} \times \frac{5}{5}$ oder das Ganze; $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{20}$; $\frac{3}{5}$ sind $3 \times 4 = \frac{12}{4}$ oder $\frac{12}{20}$; diese und $\frac{1}{20}$ sind $\frac{13}{20}$; folglich ist die Proportion $3 : 13\frac{1}{4} = \frac{3}{5} : 2\frac{13}{20}$.

i) Es verhält sich 20 zu $4\frac{3}{7}$, wie sich 8 zu welcher Zahl verhält?

Aufl. Zunächst sind hier die 8 als das Ganze anzusehen, von dem eben so viel aliquote Theile gesucht werden sollen, als $4\frac{3}{7}$ von 20 enthalten; $4\frac{3}{7}$ sind aber $4 + \frac{3}{20}$ von 20; es sind daher auch $4\frac{3}{7}$ von 8 zu suchen; $\frac{1}{20}$ von 8 ist $\frac{8}{20}$ oder $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{20}$ folglich $4 \times 2 = \frac{8}{5}$; $\frac{7}{20}$ ist $\frac{3}{7}$ von $\frac{8}{20}$ oder von $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{7}$ von $\frac{2}{5}$ sind $3 \times 2 = \frac{6}{35}$ oder $\frac{6}{35}$. Die gesuchte Zahl ist daher $\frac{8}{5} + \frac{6}{35}$; $\frac{8}{5}$ ist $1\frac{3}{5}$; dazu noch $\frac{6}{35}$, diese machen mit $\frac{3}{5}$ $\frac{21+6}{35} = \frac{27}{35}$. Das Verhältniß ist demnach $20 : 4\frac{3}{7} = 8 : 1\frac{27}{35}$.

§. 23.

Die Vorstellung der Theilverhältnisse beruht wesentlich auf dem Verhältnisse der Einheit zu einer jeden zusammengesetzten Zahl. Es kommt nichts darauf an, was und wie viel diese Einheit in sich begreift, sondern einzig und allein auf die Art ihrer Verbindung mit zusammengesetzten Zahlen. Schon oben wurde bemerkt, daß z. B. 1 zu 3 in eben demselben Verhältnisse stehe, als 2 × 1 zu 2 × 3, und daß 3 × 1 von 3 × 3 eben sowohl den dritten Theil enthalte, als 1 × 1 von 1 × 3. Dies angewendet auf abstractere Fälle, wird es einleuchtend machen, daß eine auf gleiche Weise zusammengesetzte Anzahl von aliquoten Theilen sich zu einer eben so großen Anzahl von Ganzen nicht anders verhalten könne, als ein einfacher Theil zu einem einfachen Ganzen. So wie also $\frac{1}{3}$ zu einem Ganzen sich verhält, so müssen sich auch $\frac{2}{3}$ zu zwei Ganzen, $\frac{3}{3}$ zu drei Ganzen, $\frac{4}{3}$ zu vier Ganzen, verhalten, das heißt: $\frac{2}{3}$ ist von zwei Ganzen $\frac{1}{3}$. Eben so sind $\frac{5}{3}$ von fünf Ganzen nicht mehr und nicht weniger als $\frac{1}{3}$; denn die Theile wachsen in eben dem Verhältnisse als die Ganzen; folglich können sich auch die Verhältnisse selbst nicht ändern. Dieser Satz ist sehr fruchtbar, indem er die verwickeltsten Verhältnisse durch höchst einfache Operationen zur Klarheit bringt. Ein Beispiel: Es seyen $2\frac{1}{3}$ gegeben, die mit sieben Ganzen verglichen werden sollen. Da $2\frac{1}{3}$ $\frac{7}{3}$

machen, so müssen diese, nach der obigen Angabe, zu sieben Ganzen sich eben so verhalten, als ein Drittel zu einem Ganzen. Es sind also $2\frac{1}{3}$ nur drei mal zu wiederholen, um sieben Ganze zu geben. Wäre nun die größere Summe 14, so würde man gleich von selbst schließen, daß $2\frac{1}{3}$ davon nur $\frac{1}{6}$ sey u. s. f. Es kann sich aber dies Verhältniß auch ändern, und zwar auf eine doppelte Weise: es kann nämlich entweder die Anzahl der Theile die gleich große Anzahl der Ganzen übersteigen, z. B. $\frac{8}{3}$ zu sieben Ganzen, oder es kann die Zahl, welche die Summe der Ganzen anzeigt, diejenige Zahl, welche die Summe der Theile ausdrückt, übersteigen. Dies wäre der Fall, wenn z. B. das Verhältniß $\frac{7}{3}$ zu 8 Ganzen vorhanden wäre. In einem jeden dieser beiden Fälle geht man von dem ersten Verhältnisse der gleichen Theile zu gleichen Ganzen aus. Im ersten Falle sieht man, daß die Anzahl der Theile mehr beträgt, als den dritten Theil; $\frac{7}{3}$ wäre von sieben Ganzen $\frac{1}{5}$. Nun sind aber $\frac{8}{3}$ da, das ist $\frac{1}{7}$ mehr als 7; folglich auch $\frac{1}{7}$ mehr als $\frac{1}{3}$. Es ist daher auch $2\frac{2}{3}$ von sieben Ganzen $\frac{8}{3}$ oder $1 + \frac{1}{7}$; darnach wird bei jedem Verhältnisse verfahren werden müssen. Im zweiten Falle wächst die Anzahl der Ganzen, während die Theile bleiben. Es sind $\frac{7}{3}$ da, die im Verhältnisse zu acht Ganzen stehen. Wenn sieben Ganze da wären, so wäre $\frac{7}{3}$ der dritte Theil; da aber ein Ganzes mehr da ist, so müßte auch noch $\frac{1}{3}$ mehr da seyn, um im glei-

chen Verhältnisse zu bleiben. Da aber dies nicht der Fall ist, so muß es auch um einen solchen Theil weniger seyn, als das Ganze mehr enthält. $\frac{8}{3}$ wäre $\frac{1}{3}$ von acht Ganzen; $\frac{7}{3}$ ist aber nur $\frac{7}{8}$ von $\frac{8}{3}$; folglich auch nur $\frac{7}{8}$ eines Drittels von acht Ganzen. Theile stehen demnach in einem nothwendigen unabänderlichen Verhältnisse mit Ganzen. Es sind immer $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$ u. s. f. ein Ganzes. Die Summe der Theile steht aber mit der gegebenen Summe von Ganzen in demselben Verhältnisse, als eine jede concrete Zahl mit der andern. Daher sind die Summen sogleich zu vergleichen, dann ist die Größe der Theile zu beachten. Wenn daher $\frac{7}{3}$ mit acht Ganzen zu vergleichen ist, so setzt man die Sieben mit der Achte in ihr Verhältniß, d. i. $\frac{7}{8}$. Da die Sieben nur Drittel bezeichnet, so bleibt dies auch hier $\frac{7}{8}$. Wenn $\frac{8}{3}$ und nur sieben Ganze da sind, so verfährt man damit auf eben dieselbe Weise. Acht wird sodann mit Sieben in Verhältniß gesetzt, als $\frac{8}{7}$. Das Verhältniß der Theile, das ist hier der Drittel, bleibt; also $\frac{8}{7}$. Es versteht sich von selbst, daß die doppelte und mehrfache Anzahl der aliquoten Theile, z. B. $\frac{14}{3}$ von sieben Ganzen, nicht anders zu behandeln sey, als bei einfachen Zahlen. $\frac{7}{3}$ sind von sieben Ganzen $\frac{1}{3}$; folglich müssen $\frac{14}{3}$ $\frac{2}{3}$ von sieben Ganzen seyn. Eben so müssen $\frac{13}{3}$ von vierzehn Ganzen seyn $\frac{13}{14}$ von $\frac{2}{3}$, und $\frac{15}{3} = 2 + \frac{1}{14}$ von $\frac{2}{3}$ u. s. f.

Uebungen.

Viertel:

1 = $\frac{1}{4}$ von 4.

$1\frac{1}{4}$ = $\frac{5}{4}$, d. i. $\frac{1}{4}$ von 5.

$1\frac{2}{4}$ = $\frac{6}{4}$, d. i. $\frac{1}{4}$ von 6.

$1\frac{3}{4}$ = $\frac{7}{4}$, d. i. $\frac{1}{4}$ von 7.

2 = $\frac{8}{4}$, d. i. $\frac{1}{4}$ von 8.

$2\frac{1}{4}$ = $\frac{9}{4}$, d. i. $\frac{1}{4}$ von 9.

$2\frac{2}{4}$ = $\frac{10}{4}$, d. i. $\frac{1}{4}$ von 10.

$2\frac{3}{4}$ = $\frac{11}{4}$, d. i. $\frac{1}{4}$ von 11.

3 = $\frac{12}{4}$, d. i. $\frac{1}{4}$ von 12 u. s. f.

b)

2 × 1 = $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ von 1 × 4.

2 × $1\frac{1}{4}$ = $\frac{10}{4}$ = $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ von 1 × 5.

2 × $1\frac{2}{4}$ = $\frac{12}{4}$ = $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ von 1 × 6.

2 × $1\frac{3}{4}$ = $\frac{14}{4}$ = $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ von 1 × 7.

2 × 2 = $\frac{1}{2}$ von 1 × 8.

3 × $2\frac{1}{4}$ = $\frac{18}{4}$ = $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ von 1 × 9.

u. s. f.

c)

[Das Ganze ändert sich.]

$\frac{3}{4}$ ist $\frac{1}{4}$ von 3 Ganzen.

$\frac{3}{4}$ ist $\frac{3}{4}$ von 1 oder $\frac{4}{4}$ *).

$\frac{4}{4}$ ist $\frac{1}{4}$ von 4 Ganzen.

---

folglich $\frac{3}{4}$ = $1\frac{3}{4}$ von 4.

*) Denn Eins hat $\frac{4}{4}$; $1\frac{1}{4}$ = $\frac{5}{4}$; nun sind aber $\frac{4}{4}$ = $\frac{4}{5}$ von $\frac{5}{4}$.

$\frac{3}{4}$ ist $\frac{3}{5}$ von 1_4 oder $\frac{5}{4}$.
$\frac{5}{4} = \frac{1}{4}$ von 5.

---

*) $\frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$ von 5.

$\frac{3}{4} = \frac{3}{7}$ von $1\frac{3}{4}$ oder $\frac{7}{4}$.
$\frac{7}{4} = \frac{1}{4}$ von 7 Ganzen.

---

*) $\frac{3}{4} = \frac{3}{7}$ von 7 Ganzen u. s. f.

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ ist $\frac{1}{4}$ von 5 Ganzen.
$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ ist $\frac{5}{6}$ von $1\frac{2}{4}$ oder $\frac{6}{4}$.
$\frac{6}{4} = \frac{1}{4}$ von 6 Ganzen.

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{6}$ von 6 Ganzen.

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{7}$ von $1\frac{3}{4}$ oder $\frac{7}{4}$.
$\frac{7}{4} = \frac{1}{4}$ von 7 Ganzen.

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ von 7 Ganzen.

[Die Theile verändern sich.]

$\frac{3}{4}$ ist $\frac{1}{4}$ von 3.
$\frac{4}{4}$ ist $1\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$.
$\frac{3}{4}$ ist $\frac{1}{4}$ von 3 Ganzen.

---

folglich $\frac{4}{4}$ $1 + \frac{2}{4} \times$ von 3.

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ ist $\frac{5}{3}$ oder $1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$.
$\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ von 3 Ganzen.

$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ oder $1 + \frac{2}{3}$ von 3 Ganzen.

Man sieht leicht, daß sich hieraus auch ergiebt, wie auf diese Weise ein jedes Verhältniß

*) Diese Striche bedeuten die Folgerung, und können im Sprechen mit folglich, daher u. s. f. ausgedrückt werden.

sich vermitteln lasse, sobald man nur alles auf gleiche Theile zurückführen kann. Wenn man z. B. weiß, daß $\frac{5}{3}$ der dritte Theil von 5 Ganzen ist, so weiß man auch, daß die dreimalige Wiederholung der 5 dem Ganzen gleich seyn müsse. Wenn das Ganze aber mehr beträgt, so hat man natürlich gleich darauf zu sehen, wie viel mal 5 dasselbe mehr ist; denn gerade um so viel mal drei mal müssen auch die $\frac{5}{3}$ wiederholt werden, um dem Ganzen gleich zu seyn. Wären 10 Ganze da, und nur $\frac{5}{3}$, so müßten diese Theile 2×3 mal, d. i. also 6 mal, wiederholt werden; und wären 15 Ganze da, so müßte die Wiederholung $3 \times 3 = 9$ mal geschehen. Denn jede 5 erfordert eine dreimalige Wiederholung. Da nun 15 vorhanden sind, und in dieser die 5 drei mal enthalten ist, so muß natürlich auch die Wiederholung dieser $\frac{5}{3}$ 3×3 mal erfolgen. Es kann aber auch geschehen, daß die 5 nicht gerade zwei-, drei- oder mehrfach, sondern vielleicht $1\frac{1}{5}$, $2\frac{1}{5}$ mal oder anders wiederholt werden müßte, dann würde natürlich auch die dreimalige Wiederholung der $\frac{5}{3}$ eben darnach behandelt werden müssen. So wie die 5 ein und $\frac{1}{5}$tel mal wiederholt werden muß, um 6 zu geben, so müssen auch $\frac{5}{3}$ ein mal 3 und $\frac{1}{5}$ von 1×3 wiederholt werden, um das gesuchte Ganze zu geben. Gesetzt, es wäre die Aufgabe: $1\frac{2}{3}$ verhält sich zu 6, wie sich 30 zu einer unbekannten Zahl verhält. Da $1\frac{2}{3}$ oder $\frac{5}{3}$ ein mal $\frac{1}{5}$ mal drei mal genommen werden muß, um 6 Ganzen gleich zu werden, so müssen 30 drei mal und $\frac{1}{5}$ von drei mal, das ist $\frac{3}{5}$tel mal, wiederholt werden; $3 + \frac{3}{5} \times 30 = 90 + 18 = 108$. So verhält sich $1\frac{2}{3}$ zu 6, wie sich 30 zu 108 verhält. Um dies noch klärer einzusehen, so denke man sich das Verhältniß $1\frac{2}{3}$ zu 9, wie 30 zu einer unbekannten Zahl. Die Auflösung ist hier: $1\frac{2}{3}$ ist $\frac{5}{3}$;

dies ist der dritte Theil von 5 Ganzen. Neun ist aber $1\frac{4}{5}$ mal 5; folglich $1\frac{4}{5}$ mal 3 mal $\frac{5}{3}$; $\frac{4}{5}$ von 3 ist aber $4 \times 3 = \frac{12}{5}$, d. i. $2\frac{2}{5}$; dies zu 3 ist $5\frac{2}{5}$ mal. Da nun ein mal $\frac{5}{3}$ 30 beträgt, so muß das gesuchte Ganze $3 + 2\frac{2}{5}$, d. i. $5 + \frac{2}{5} \times 30 = 162$, betragen. Wäre das Verhältniß $1\frac{2}{3} : 11 = 30 : x$. so würde man dieses Verhältniß so entwickeln: $1\frac{2}{3}$ ist $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{3}$ ist der dritte Theil von 5 Ganzen; diese sind folglich $3 \times \frac{5}{3}$; 5 Ganze sind in 11 enthalten $2 + \frac{1}{5}$ mal; folglich enthalten diese 11 auch $2 + \frac{1}{5} \times 3 \times \frac{5}{3}$, d. i. $6\frac{3}{5}$ mal $\frac{5}{3}$. Da $\frac{5}{3}$, oder $1\frac{2}{3}$, der Summe 30 gleich sind, so müssen $11 = 6\frac{3}{5} \times 30$ seyn, d. i. $180 + 18 = 198$. Dasselbe Resultat könnte auch auf eine andere Weise gefunden werden, indem man so räsonnirte: $\frac{5}{3}$ ist der dritte Theil von 5 Ganzen. Wenn $\frac{5}{3}$ gleich sind 30, so müssen 5 Ganze $3 \times 30 = 90$ betragen. Nun sind 11 Ganze $2\frac{1}{5} \times 5$. Wenn 5 Ganze 90 betragen, so müssen 11 ebenfalls $2 + \frac{1}{5} \times 90$, das sind $180 + 18$ oder 198 betragen. Es beruht dies Verfahren auf der schon früherhin bewährten Regel (§. 8. S. 23.), daß es ganz gleich sey, welche von beiden Zahlen durch die andere multiplicirt werde. Es ist daher auch in Ansehung des Vermehrens ganz einerlei, ob der Multiplicandus oder der Multiplicator vermehrt werde; es wird und muß immer dieselbe Summe daraus entstehen. Umgekehrt wird das Verfahren seyn, wenn der umgekehrte Fall Statt findet. Wenn $\frac{7}{3}$ und 6 Ganze vorhanden sind, so wird die Anzahl der Theile noch $\frac{1}{6}$ mehr betragen als $\frac{1}{3}$. Wären nun diese $\frac{7}{3}$ ebenfalls gleich der Zahl 30, so würde diese 30 $\frac{7}{6}$ des Drittels enthalten. Die 30 dürfte also auch $\frac{1}{7}$ weniger, d. i. nur $\frac{6}{7}$ von drei mal wiederholt werden. $\frac{1}{7}$ weniger als 3 ist aber $2\frac{4}{7}$; folglich ist das Ganze $2\frac{4}{7} \times 30$, d. i. $60 + 17\frac{1}{7}$, also $77\frac{1}{7}$. Dasselbe

Resultat wird man auch finden, wenn man auf folgende Weise räsonnirt: $\frac{7}{3}$ ist der dritte Theil von 7 Ganzen; erstere sind in den letztern drei mal wiederholt. Wenn nun $\frac{7}{3}$ gleich sind 30, so ist $3 \times 30 = 90$ gleich 7 Ganzen. Nun sind aber nur 6 vorhanden, d. i. $\frac{1}{7}$ weniger als 7; folglich ist auch die gesuchte Zahl $\frac{1}{7}$ weniger als 90; $\frac{1}{7}$ von 90 ist $12\frac{6}{7}$; diese von 90 weg, bleiben noch $77\frac{1}{7}$. Die Gleichheit der Produkte nach beiden Verfahrungsarten beruht auf denselben Thatsachen, von denen so eben, und §. 8. S. 23 folg. die Rede war. Beide Verfahrungsarten müssen nothwendig zum Ziele führen, und beide sind gleich verständlich und einleuchtend. Indeß ist die erste deswegen kürzer und verständlicher, weil sie gewöhnlich mit weniger Zahlen zu operiren hat. Daß die Operation sich nicht ändere, wenn anstatt der Drittel aliquote andere Theile vorhanden sind, ist schon von selbst klar. Nur die Vervielfältigung der Theile muß in eben dem Maße steigen, als dieselben kleiner sind. Wären in den obigen Beispielen überall Viertel, anstatt der Drittel, vorgekommen, so hätte, anstatt der dreifachen Wiederholung, eine vierfache, wären es Fünftel gewesen, eine fünffache u. s. w. Statt finden müssen. Von einem solchen Falle nur noch ein Beispiel: Es verhalte sich $4\frac{3}{7}$ zu 31, wie sich 50 zu einer unbekannten Zahl verhält. 4 Ganze sind $4 \times 7 = \frac{28}{7}$; dies mit $\frac{3}{7}$ macht $\frac{31}{7}$; $\frac{31}{7}$ sind von 31 Ganzen $\frac{1}{7}$. Da nun die 50 gleich sind den $4\frac{3}{7}$, so muß die siebenmalige Wiederholung derselben auch gleich seyn der Zahl 31; $7 \times 50 = 350$. So ist nun das Verhältniß $4\frac{3}{7} : 31 = 50 : 350$. Wäre das Verhältniß $4\frac{3}{7}$ zu 32, so hätte man natürlich $7 + \frac{1}{31}$ von 7, d. i. $7\frac{7}{31}$ mal die 50 nehmen müssen; $7 + \frac{1}{31} \times 50 = 350 + 11\frac{9}{31}$, das sind $361\frac{9}{31}$. Wenn hingegen $4\frac{3}{7}$ zu 30 Ganzen das

Verhältniß ausgedrückt hätte, so müßte dann das Ganze $\frac{1}{31}$ weniger als 7 × 50 seyn; $\frac{1}{31}$ von 7, d. i. $\frac{7}{31}$, weggenommen, bleiben $6\frac{24}{31}$; 6 × 50 = 300; $\frac{2}{31}$ von 50 = $\frac{100}{31}$ sind $3\frac{7}{31}$; $\frac{24}{31}$ sind folglich $12 \times 3 + \frac{7}{31} = 36 + \frac{84}{31}$, das sind $2\frac{22}{31}$. So ist das Ganze $36 + 2\frac{22}{31}$, das sind $38 + \frac{22}{31}$; diese zu 300 giebt die Summe von $338\frac{22}{31}$. Dasselbe konnte auch so gefunden werden, wenn man gleich die 50 sieben mal nahm, und sodann den ein und dreißigsten Theil der ganzen Summe entzog. $7 \times 50 = 350$; $\frac{1}{31}$ von 35 ist $1\frac{4}{31}$, also 1 und $\frac{4}{31}$ Zig; $10 + 4 \times 10 = 40\frac{1}{31}$, d. i. $1\frac{9}{31}$. Es müssen also $11\frac{9}{31}$ der Zahl 350 abgenommen werden, dann entsteht die Zahl $138\frac{22}{31}$. Wenn es gerade nahe gelegt ist, so kann man auch das Fehlende zu dem gegebenen Theile sogleich hinzu thun, oder das Zuviele hinweg nehmen, ohne daß dadurch die Sache sich ändern wird. Wenn man $3\frac{1}{4}$ zu 14 Ganzen hat, wie 40 zu einer unbekannten Zahl, so kann man nun so auflösen: $3\frac{1}{4}$ sind $\frac{13}{4}$; diese sind $\frac{1}{4}$ von 13 Ganzen. Von $14\frac{1}{13}\frac{3}{4}$ fehlt folglich noch $\frac{1}{13}$, dann wäre 40 der vierte Theil des unbekannten Ganzen. Wenn ich also 40 noch um $\frac{1}{13}$ vermehre, so wird es $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{13}$ von 40 ist aber $3\frac{1}{13}$; dies zu 40 ist $43\frac{1}{13}$; so wäre der vierte Theil des Ganzen gefunden. Die viermalige Wiederholung der $43\frac{1}{13}$ also $4 \times 34\frac{1}{13} = 172\frac{4}{13}$ ist das gesuchte Ganze. Eben so leicht wäre der zweite Fall: $3\frac{1}{4}$ zu 12, wie 40 zu x. Hier ist der vierte Theil $\frac{12}{4}$, das ist $\frac{1}{13}$ weniger als $\frac{13}{4}$. Wenn ich also $\frac{1}{13}$ weniger nehme als 40, so bekomme ich den vierten Theil des gesuchten Ganzen; $\frac{1}{13}$ von 40 ist $3\frac{1}{13}$; dies weg, bleiben $36\frac{12}{13}$. Dies ist also das Viertel, und $4 \times 36\frac{12}{13}$ das Ganze, d. i. $147\frac{9}{13}$. Das ganze Verhältniß ist demnach $3\frac{1}{4} : 12 = 40 : 147\frac{9}{13}$. Es mag hier ein einziges Beispiel die dreifach ver-

schiedene Art der Auflösung zeigen. $3\frac{1}{5}$ verhält sich zu 40, wie 30 zu einer unbekannten Zahl.

Erste Art der Auflösung:

$3\frac{1}{5}$ sind $\frac{16}{5}$; 16 Ganze sind $5 \times \frac{16}{5}$; 40 Ganze sind aber $2 + \frac{1}{2} \times 16$; folglich $2 + \frac{1}{2} \times 5 = 10 + 2\frac{1}{2}$ oder $12\frac{1}{2}$. Es ist also 40 $12\frac{1}{2}$ mal $3\frac{1}{5}$. Da die 30 gleich sind $3\frac{1}{5}$, so müssen 40 gleich seyn $12\frac{1}{2} \times 30 = 360 + 15$, d. i. 375; folglich ist das Verhältniß $3\frac{1}{5} : 40 = 30 : 375$.

Zweite Art der Auflösung:

$3\frac{1}{5} = \frac{16}{5}$; 16 Ganze sind $5 \times \frac{16}{5}$. Wenn $\frac{16}{5}$ gleich ist der Summe 30, so sind 16 Ganze folglich 5×30, das sind 150. Nun sind aber 40 Ganze da, das sind $2 + \frac{1}{2} \times 16$; da 16 gleich ist der Summe 150, so betragen 40 $2 + \frac{1}{2} \times 150$, das sind $300 + 75$, also 375. Das Verhältniß ist also eben so wie vorher richtig vermittelt.

Dritte Art der Auflösung:

$\frac{16}{5}$ ist von 40 Ganzen $\frac{16}{5}$; $\frac{40}{5}$ ist der fünfte Theil von 40 Ganzen; $\frac{40}{5}$ ist aber $2\frac{1}{2} \times \frac{16}{5}$; folglich ist auch $2\frac{1}{2} \times 30$, das sind $60 + 15$, oder 75, gleich dem fünften Theile des Ganzen; 5×75, das sind 375, ist also das gesuchte Ganze.

Sonach ist das Resultat auf allen drei vorgezeichneten Wegen gefunden. Von dem umgekehrten Falle mag hier auch eine dreifache Auflösung einer Aufgabe stehen.

Aufgabe.

$7\frac{1}{5} : 30 = 40 : x.$

Erste Art der Auflösung:

$7\frac{1}{5}$ sind $\frac{36}{5}$, das ist $\frac{1}{5}$ von 36 Ganzen. Nun sind aber nur 30 Ganze vorhanden, das sind $\frac{30}{36}$, oder $\frac{1}{6}$ weniger als 36; folglich sind die $\frac{36}{5}$ auch $\frac{30}{36}$ oder $\frac{1}{6}$ mal weniger zu wiederholen als 5 mal; ein Sechstel von 5 ist $\frac{5}{6}$; diese weniger als 5 ist $4\frac{1}{6}$. Die Totalsumme ist daher $4\frac{1}{6} \times 40 = 160 + 6\frac{2}{3}$, also $166\frac{2}{3}$. Demnach ist die ganze Proportion: $7\frac{1}{5} : 30 = 40 : 166\frac{2}{3}$.

Zweite Art der Auflösung:

$7\frac{1}{5}$ sind $\frac{36}{5}$; diese sind $\frac{1}{5}$ von 36 Ganzen. Wären also 36 Ganze vorhanden, so müßte die 40 gerade 5 mal genommen werden. Da aber nur 30 vorhanden sind, so würden $\frac{30}{36}$ oder $\frac{1}{6}$ zu viel heraus kommen. Wenn daher dies Sechstel der Totalsumme entzogen wird, so wird die gesuchte Zahl richtig gefunden seyn. Nun ist 5×40 gerade 200; $\frac{1}{6}$ von 200 ist $\frac{1}{3}$ von 100, das sind $33\frac{1}{3}$; diese von 200, bleiben $166\frac{2}{3}$.

Dritte Art der Auflösung:

$7\frac{1}{5}$ sind $\frac{36}{5}$; 30 Ganze sind $5 \times \frac{30}{5}$. Nun sind aber $\frac{30}{5} - \frac{6}{36}$ oder $\frac{1}{6}$ weniger als $\frac{36}{5}$. Da nun die 40 den $\frac{36}{5}$ gehört, so ist sie folglich auch $\frac{1}{6}$ zu viel als der 5te Theil des Ganzen. Wenn ihr aber $\frac{1}{6}$ abgenommen wird, so ist sie natürlich $6\frac{2}{3}$; diese von 40, bleiben $33\frac{1}{3}$; dies ist also $\frac{1}{5}$ des Ganzen. Das Letztere ist also $5 \times 33\frac{1}{3}$, das sind $166\frac{2}{3}$.

Es ergibt sich demnach auch hier in allen drei Fällen dasselbe Resultat.

Uebungen.

Sechstel.

1)

6 Ganze sind $6 \times \frac{6}{6}$ oder 6×1.
7 Ganze sind $6 \times \frac{7}{6}$ oder $6 \times 1 + \frac{1}{6}$.
8 Ganze sind $6 \times \frac{8}{6}$ oder $6 \times 1 + \frac{2}{6}$.
9 Ganze sind $6 \times \frac{9}{6}$ oder $6 \times 1 + \frac{3}{6}$.
11 Ganze sind $6 \times \frac{11}{6}$ oder $6 \times 1 + \frac{5}{6}$.

u. s. f.

2)

5 Ganze sind $6 \times \frac{5}{6}$.

6 Ganze sind $\frac{6}{5} \times 6 \times \frac{5}{6}$; $\frac{6}{5} \times 6 = 7\frac{1}{5} \times \frac{5}{6}$.

7 Ganze sind $\frac{2}{5}$ mehr als 5 Ganze; 5 Ganze sind $6 \times \frac{5}{6}$; folglich sind 7 $\frac{2}{5}$ mehr als $6 \times \frac{5}{6}$; $\frac{2}{5}$ von 6 sind $2\frac{2}{5}$; $2\frac{2}{5}$ mehr als 6 sind $8\frac{2}{5}$; 7 Ganze sind also $8\frac{2}{5}$ mal $\frac{5}{6}$.

8 Ganze sind $\frac{8}{5}$ von $6 \times \frac{5}{6}$; 5 Ganze sind $6 \times \frac{5}{6}$; 8 Ganze sind $\frac{3}{5}$ mehr als 5 Ganze; folglich $\frac{3}{5}$ mehr als $6 \times \frac{5}{6}$; $\frac{3}{5}$ von 6 sind $3\frac{3}{5}$; $3\frac{3}{5}$ mehr als 6 sind $9\frac{3}{5}$; 8 Ganze sind also $9\frac{3}{5} \times \frac{5}{6}$.

9 Ganze sind $\frac{9}{5}$ oder $1\frac{4}{5} \times \frac{5}{6}$ Ganze; 5 Ganze sind $6 \times \frac{5}{6}$; 9 Ganze sind $\frac{4}{5}$ mehr als 5 Ganze; folglich $\frac{4}{5}$ mehr als $6 \times \frac{5}{6}$; $\frac{4}{5}$ mehr als 6 sind $6 + 4\frac{4}{5}$, das sind $10\frac{4}{5}$; 9 Ganze sind also $10\frac{4}{5} \times \frac{5}{6}$.

10 Ganze sind $\frac{1}{5}$ × 5 oder 2 × 5 Ganze;
5 Ganze sind 6 × $\frac{5}{6}$; 10 Ganze sind
2 × 5 Ganze; folglich auch 2 × 6 × $\frac{5}{6}$;
2 × 6 = 12; folglich sind 10 Ganze
12 × $\frac{5}{6}$.

11 = $13\frac{1}{5}$ × $\frac{5}{6}$.
12 = $14\frac{2}{5}$ × $\frac{5}{6}$.
13 = $15\frac{3}{5}$ × $\frac{5}{6}$.
14 = $16\frac{4}{5}$ × $\frac{5}{6}$.
15 = 18 × $\frac{5}{6}$ u. s. w.

3)

15 Ganze sind 3 × 5 Ganze; 5 Ganze sind
6 × $\frac{5}{6}$; 15 Ganze sind folglich 3 × 6 × $\frac{5}{6}$;
3 × 6 = 18; 15 Ganze sind also 18 × $\frac{5}{6}$.

15 Ganze sind 15 × $\frac{6}{6}$ oder ein Ganzes.

$1\frac{1}{6}$ = $\frac{7}{6}$:

15 Ganze sind $\frac{1}{7}$ weniger als 15 × $\frac{6}{6}$; $\frac{1}{7}$
von 15 ist $2\frac{1}{7}$; $2\frac{1}{7}$ von 15 weg, bleiben
$12\frac{6}{7}$; 15 Ganze sind daher $12\frac{6}{7}$ × $1\frac{1}{6}$.

$1\frac{2}{6}$ = $\frac{8}{6}$:

15 ist 15 × $\frac{6}{6}$; $\frac{6}{6}$ ist $\frac{2}{8}$ oder $\frac{1}{4}$ weniger als
$\frac{8}{8}$; folglich 15 — $\frac{1}{4}$ = $11\frac{1}{4}$ × $1\frac{2}{6}$.

$1\frac{3}{6}$ = $\frac{9}{6}$ oder $1\frac{1}{2}$:

15 ist 15 × $\frac{6}{6}$; $\frac{6}{6}$ ist $\frac{1}{3}$ weniger als $\frac{9}{9}$; 15
ist folglich 15 — $\frac{1}{3}$ = 10 × $\frac{9}{9}$.

$1\frac{4}{6} = \frac{10}{5}$ oder $1\frac{2}{3}$:

$15 = 15 \times \frac{6}{6}$; $\frac{6}{6}$ ist $\frac{2}{5}$ weniger als $\frac{10}{6}$;
15 muß also $\frac{2}{5}$ weniger als $15 \times \frac{10}{6}$ seyn;
$\frac{2}{5}$ weniger als 15 sind 9; 15 ist daher
$9 \times \frac{10}{6}$.

$1\frac{5}{6} = \frac{11}{6}$:

15 ist $15 - \frac{5}{11} \times \frac{11}{6}$, d. i. $18\frac{2}{11} \times 1\frac{5}{6}$.

$2\frac{1}{6} = \frac{13}{6}$:

13 Ganze sind $6 \times \frac{13}{6}$. 15 Ganze sind
$2\frac{2}{13} \times 6 = 6\frac{1}{11}\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{6}$.

$2\frac{2}{6} = \frac{14}{6}$:

15 sind $6 + \frac{1}{14} = 6\frac{6}{14} \times 2\frac{2}{6}$ u. s. w.

Aufgaben.

a) $\frac{3}{7}$, wie viel sind es Theile von 3 Ganzen?

Antw. $\frac{1}{7}$. Denn $\frac{1}{7}$ ist von einem Ganzen $\frac{3}{7}$; folglich ist $\frac{3}{7}$ von 3 Ganzen ebenfalls der siebente Theil.

b) $\frac{3}{7}$, wie viel Theile von 4 Ganzen?

Antw. $\frac{3}{28}$. Denn $\frac{3}{7}$ sind $\frac{1}{7}$ von 3; 3 sind $\frac{3}{4}$ von 4 Ganzen; $\frac{1}{7}$ von 3 ist folglich $\frac{1}{7}$ von $\frac{3}{4}$, oder $\frac{3}{28}$ eines Siebentels; $\frac{3}{7}$ sind aber $\frac{3}{28}$.

c) $\frac{4}{7}$, wie viel mal sind sie enthalten in 5 Ganzen?

Antw. $8\frac{3}{4}$ mal. Denn 4 Ganze sind $7 \times \frac{4}{7}$; 5 sind $\frac{1}{4}$ mehr als 4; folglich sind 5 auch $\frac{1}{4}$ mehr als $7 \times \frac{4}{7}$; $\frac{1}{4}$ von 7 sind $1\frac{3}{4}$; diese zu $7 = 8\frac{3}{4}$; es sind daher $8\frac{3}{4} \times \frac{4}{7}$.

d) $1\frac{5}{6}$

d) $1\frac{1}{8}$, wie viel sind es Theile von 7?

Antw. $\frac{9}{56}$. Denn $1\frac{1}{8}$ sind $\frac{9}{8}$; $\frac{7}{8}$ sind von 7 Ganzen $\frac{1}{8}$; $\frac{9}{8}$ sind $\frac{2}{7}$ mehr als $\frac{7}{8}$; folglich auch $\frac{2}{7}$ mehr als $\frac{1}{8}$; $\frac{9}{8}$ sind also $1\frac{2}{7}$ oder $\frac{9}{8}$ von 7 Ganzen; $\frac{9}{8}$ sind aber $\frac{9}{56}$.

e) 7 Ganze, wie viel mal $1\frac{3}{8}$?

Antw. $5\frac{1}{11}$ mal. Denn $1\frac{3}{8}$ sind $\frac{11}{8}$; 11 Ganze sind $8 \times \frac{11}{8}$; 7 Ganze sind $\frac{7}{11}$ von 11; folglich $\frac{7}{11}$ von $8 \times \frac{11}{8}$; $\frac{7}{11}$ von 8 sind $7 \times 8 = \frac{56}{11}$, das sind $5\frac{1}{11}$.

f) $3\frac{4}{9}$, wie viel sind es Theile von 40?

Antwort: $\frac{31}{40}$ eines Neuntels, oder $\frac{31}{360}$. Denn $3\frac{4}{9} = \frac{31}{9}$; $\frac{31}{9}$ ist $\frac{31}{40}$ von $\frac{40}{9}$; $\frac{40}{9}$ sind $\frac{1}{9}$ von 40 Ganzen; $\frac{31}{9}$ sind folglich $\frac{31}{\frac{40}{9}}$ von 40. Wenn jedes Neuntel in $\frac{40}{40}$ getheilt ist, so hat das Ganze $40 \times \frac{9}{9} = \frac{360}{\frac{40}{9}}$; $\frac{31}{\frac{40}{9}}$ sind von $\frac{360}{\frac{40}{9}} = \frac{31}{360}$.

[Die letzte Zergliederung ist in den wenigsten Fällen nöthig, und nur der größern Deutlichkeit wegen beigefügt.]

g) $3\frac{7}{9}$, wie viel mal sind sie enthalten in 40 Ganzen?

Antw. $9 + \frac{6}{34}$ von 9 mal, oder $10\frac{10}{17}$. Denn $3\frac{7}{9}$ sind $\frac{34}{9}$; 34 Ganze sind $9 \times \frac{34}{9}$; 40 Ganze sind $\frac{6}{34}$ mehr als 34 Ganze; folglich auch $\frac{6}{34}$ mehr als $9 \times \frac{34}{9}$; $\frac{6}{34}$ von 9 sind $6 \times 9 = \frac{54}{34}$, d. i. $1\frac{20}{34}$, oder $1\frac{10}{17}$; diese zu $9 = 10\frac{10}{17}$.

h) $4\frac{3}{10}$, wie viel sind es Theile von 36?

Antw. $1\frac{7}{360}$ Zehntel, oder $\frac{43}{360}$. Denn $4\frac{3}{10}$ sind $\frac{43}{10}$; $\frac{36}{10}$ ist $\frac{1}{10}$ von 36 Ganzen; $\frac{43}{10}$ sind $\frac{7}{360}$ mehr als $\frac{36}{10}$; folglich auch $\frac{7}{360}$ mehr als der zehnte Theil von 36 Ganzen. Wenn alle Zehntel in 36 aufgelöst werden, so entstehen $\frac{360}{\frac{36}{10}}$; $1\frac{7}{\frac{36}{10}}$ sind aber $\frac{43}{\frac{36}{10}}$, und diese sind von 360 $\frac{43}{360}$.

i) 50, wie viel mal $7\frac{7}{10}$?

Auflöſ. $7\frac{7}{10}$ ſind $\frac{77}{10}$; 77 Ganze ſind 10 × $\frac{77}{10}$; 50 ſind von 77 $\frac{50}{77}$; folglich auch $\frac{50}{77}$ von 10, oder $\frac{10}{77}$ von 50 *); $\frac{2}{77}$ von 50 ſind zwei mal $50 = \frac{100}{77}$, das ſind $1\frac{23}{77}$; 10 iſt 5 × 2; folglich $5 \times 1 + \frac{23}{77} = 5 + \frac{115}{77}$, oder $5 + 1\frac{38}{77}$, das ſind $6\frac{38}{77}$; 50 iſt demnach $6\frac{38}{77}$ mal $10\frac{7}{10}$.

k) $1\frac{3}{7}$ verhalten ſich zu 12, wie ſich 80 zu welcher unbekannten Zahl verhält?

Aufl. $1\frac{3}{7}$ ſind $\frac{10}{7}$; 10 Ganze ſind 7 × $\frac{10}{7}$; 12 iſt $\frac{1}{5}$ mehr als 10 Ganze; folglich auch $\frac{1}{5}$ mehr als $7 \times \frac{10}{7}$; $\frac{1}{5}$ mehr als 7 iſt $8\frac{2}{5}$; 12 Ganze ſind daher $8\frac{2}{5}$ mal $1\frac{3}{7}$. Da nun $1\frac{3}{7}$ der Summe 80 gleich ſind, ſo betragen 12 Ganze $8\frac{2}{5} \times 80$, das ſind $640 + 2 \times 16 = 32$; $640 + 32 = 672$. Das Verhältniß iſt demnach $1\frac{3}{7} : 12 = 80 : 672$.

l) 15 verhält ſich zu $2\frac{1}{6}$, wie ſich 200 zu einer unbekannten Zahl verhält.

Auflöſ. $2\frac{1}{6}$ ſind $\frac{13}{6}$; $\frac{15}{6}$ iſt $\frac{1}{6}$ von 15 Ganzen; $\frac{13}{6}$ iſt $\frac{2}{15}$ weniger als $\frac{15}{6}$; folglich auch $\frac{2}{15}$ weniger als $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$ von 200 $33\frac{1}{3}$; $\frac{2}{15}$ weniger als $\frac{1}{6}$ iſt folglich hier $\frac{2}{15}$ weniger als $33\frac{1}{3}$; $\frac{1}{15}$ von 33 iſt $2\frac{3}{15}$; $\frac{1}{15}$ von einem Drittel iſt $\frac{1}{45}$; $\frac{2}{15}$ ſind alſo $2 \times 2 + \frac{3}{15} + \frac{1}{45} = 4 + \frac{6}{15} + \frac{2}{45}$. Da $\frac{6}{15} = 6 \times 3 = \frac{18}{45}$ iſt, ſo geben dieſe mit den $\frac{2}{45}$ $\frac{20}{45}$, das ſind $\frac{4}{9}$. Es kommen demnach von den $33\frac{1}{3}$ $4\frac{4}{9}$ weg; $4\frac{4}{9}$ von $33\frac{1}{3}$ abgezogen, bleiben noch $28\frac{5}{9} + \frac{1}{3}$, das ſind $\frac{8}{9}$. Das Verhältniß ſteht demnach alſo $15 : 2\frac{1}{6} = 200 : 28\frac{8}{9}$.

[Die Auflöſung konnte auch ſo geſchehen: $\frac{12}{10}$ ſind $\frac{12}{60}$; $\frac{1}{10}$ von 200 iſt $\frac{2}{10}$ von 100, das ſind $2 + 2 \times 10 = \frac{80}{60}$,

*) So wie es einerlei iſt, ob ich die 10 durch 50, oder 50 durch 10 wiederhole, ſo macht es auch keinen Unterſchied, ob ich $\frac{10}{77}$ von 50, oder $\frac{50}{77}$ von 10 nehme. Es muß ſich natürlich in beiden Fällen daſſelbe Reſultat ergeben.

oder $2\frac{2}{3}$; $\frac{12}{60}$ sind folglich $12 \times 2 + \frac{8}{5} = 26 + \frac{8}{5}$; das Letztere sind $2\frac{3}{5}$; diese zu 26, giebt $28 + \frac{8}{5}$.

m) Zu welcher Zahl verhält sich 150 so, als sich $8\frac{8}{11}$ zu 72 verhält?

Aufl. $8\frac{8}{11}$ sind $\frac{96}{11}$; 96 Ganze sind $11 \times \frac{96}{11}$; 72 sind aber von $96 = \frac{3}{4}$; folglich sind auch 72 Ganze nur $\frac{3}{4}$ von $11 \times \frac{96}{11}$; $\frac{3}{4}$ von 11 ist aber $8\frac{1}{4}$; 72 sind also $8\frac{1}{4}$ mal $8\frac{8}{11}$. Da nun $8\frac{8}{11}$ gleich ist der Summe 150, so werden 72 Ganze $8\frac{1}{4} \times 150$ betragen; $8 + \frac{1}{4} \times 15$ sind aber $120 + 3\frac{3}{4}$, also $123\frac{3}{4}$; $8 + \frac{1}{4} \times 150$ muß daher seyn $1230 + \frac{3}{4}$ Zig, das sind $7\frac{1}{2}$; dies mit dem Vorigen, macht $1237\frac{1}{2}$. Es ergiebt sich demnach folgendes vollständige Verhältniß: $8\frac{8}{11} : 72 = 150 : 1237\frac{1}{2}$.

§. 24.

Da das Verhältniß aller aliquoten Theile auf gleiche Weise, als das Verhältniß der Ganzen, bestimmt ist, so muß alles das, was hier von den Theilen und Ganzen gilt, auch von verschiedenartigen Theilen selbst auf gleiche Weise anwendbar seyn. Denn einem jeden Verhältnisse liegt die Einheit, als das Ursprüngliche, zum Grunde. So wie sich also $\frac{1}{4}$ zu $\frac{1}{2}$ verhält, so verhalten sich auch $\frac{2}{4}$ zu zwei Halben, $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{2}$ u. s. f. Eine Anzahl von aliquoten Theilen verhält sich zu einer gleich großen Anzahl verschiedenartiger anderer Theile, wie sich ein solcher Theil zu einem andern Theile verhält. Wenn $\frac{1}{7}$ von einem Viertel $\frac{4}{7}$ enthält, so sind $\frac{3}{7}$ von $\frac{3}{4}$ in eben demselben Verhältnisse. Man denke sich nun eine ge-

wisse Anzahl von Ganzen und aliquoten Theilen, z. B. $4\frac{3}{4}$, als gegeben, die mit einer Anzahl von Ganzen und aliquoten andern Theilen, z. B. $7\frac{3}{4}$, in ein Verhältniß gesetzt werden sollen, so wird man die erstere Zahl in Siebentel, die andere in Viertel, auflösen. Nun ergiebt sich, daß vier Ganze und vier Siebentel die Anzahl von 31 Siebenteln, und sieben Ganze und $\frac{3}{4}$ eben so viel Viertel machen. Es tritt also hier der Fall ein, daß eine gleiche Anzahl von Siebenteln und Vierteln heraus kommt. Daher bleibt auch dasselbe Verhältniß stehen. So sind $\frac{31}{7}$ von $\frac{31}{4} = \frac{4}{7}$; es sind daher auch $4\frac{3}{7}$ von $7\frac{3}{4}$ nichts anders als $\frac{4}{7}$, oder $7\frac{3}{4}$ sind $1 + \frac{3}{4}$ mal $4\frac{3}{7}$.

Es kann aber auch hier ein doppeltes Verhältniß der Theile Statt finden, wenn nicht nur die aliquoten Theile selbst (oder die Nenner), sondern auch die Anzahl derselben (die Zähler) verschieden sind. Hier werden, wie oben, beide Zahlen, sowohl die Zähler, als auch die Nenner, in Verhältniß gesetzt. Wenn also in dem vorigen Beispiele, anstatt der $7\frac{3}{4}$, etwa $8\frac{1}{4}$ vorhanden gewesen wäre, so würde $4\frac{3}{7}$, das sind $\frac{31}{7}$, von dieser Zahl, nämlich $\frac{33}{4}$, nicht mehr $\frac{4}{7}$, sondern nur $\frac{3}{33}$ von $\frac{4}{7}$ seyn. Denn da eine gleiche Anzahl von Theilen vorhanden seyn muß, wenn die zusammengesetztern Zahlen in eben dem Verhältnisse bleiben sollen, als die einfachen, so wechselt natürlich auch das Verhältniß in eben dem Grade, als die Zahlen selbst, durch welche die Anzahl der

aliquoten Theile ausgedrückt wird. Wenn $\frac{3}{8}$ auf der einen, und eben so viel Fünftel auf der andern Seite vorhanden wären, so würde man hier das Verhältniß der 5 zu 8 finden; denn $\frac{1}{8}$ ist von einem Fünftel $\frac{5}{8}$; folglich sind es auch $\frac{3}{8}$ von $\frac{3}{5}$. Nähme man aber an, daß die Anzahl der $\frac{3}{8}$ um zwei vermehrt werde, so daß daraus $\frac{5}{8}$ hervorgingen, so würde dies Verhältniß gleich sich ändern, und zwar in eben demselben Verhältnisse, als die Fünf die Drei verändert. Da fünf zwei Drittel mehr ist als drei, so sind auch $\frac{5}{8}$ zwei Drittel mehr als $\frac{3}{8}$; diese sind von $\frac{3}{5}$ nicht mehr $\frac{5}{8}$, sondern $\frac{2}{3}$ mehr als $\frac{5}{8}$. Da nun $\frac{2}{3}$ von 5 $3\frac{1}{3}$ machen, und diese mit 5 gleich sind der Summe $8\frac{1}{3}$, so ergiebt sich hier $8\frac{1}{3}$ als das richtige Verhältniß; $\frac{5}{8}$ sind demnach $\frac{1}{3}$, d. i. $\frac{1}{24}$, mehr als $\frac{3}{5}$. Verändert sich aber diese Anzahl von Theilen auf eine andere Weise, so daß z. B. die Anzahl der Fünftel sich um eins vermehrt, so stehen die $\frac{3}{8}$ immer nur mit $\frac{3}{5}$teln im Verhältnisse; diese drei Fünftel müssen aber wiederum nur als Theile von $\frac{4}{5}$ angesehen werden. $\frac{3}{5}$ sind aber von $\frac{4}{5}$ gleich $\frac{3}{4}$tel; mithin sind $\frac{3}{8}$ von $\frac{4}{5} = \frac{5}{8}$ von $\frac{3}{4}$, oder, welches einerlei ist, $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{8}$. Will man diese $\frac{3}{\frac{4}{5}}$ durch ein einfacheres Verhältniß, aber immer aufgelöst in aliquote kleinere Theile ausdrücken, so macht man dann $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{8}$, das sind $3 \times 5 = \frac{15}{8}$, oder $\frac{1}{3}\frac{5}{2}$; so viel Theile betragen also $\frac{3}{8}$ von $\frac{4}{5}$. Wenn die Anzahl der kleinern Theile nicht bloß der Summe, sondern auch dem Inhalte nach die Anzahl

der aliquoten größern übersteigt, so werden die letztern als Theile der ersten aufgefaßt. Nun findet man aber, daß in dem Falle, auf dem Standpunkte, von dem man ausgeht, die Zähler immer mehr betragen als die Nenner. Denn $\frac{1}{5}$ ist $\frac{2}{5}$ eines Neuntels, $\frac{8}{5}$ eines Achtels u. s. f. Da bei einer Vermehrung der aliquoten kleinern Theile die Nenner vermehrt werden müßten, und diese nur in den seltensten Fällen ohne neue Brüche sich vermehren lassen, so ist es hier rathsamer, lieber die Zähler nach eben denselben Regeln und Verhältnissen zu vermindern. Denn indem ich eine Zahl, die mit einer andern im Verhältnisse steht, vermindere, so ist in dieser Beziehung die andere in eben dem Grade schon von selbst vermehrt. Gesetzt, es wären Fünftel mit Neunteln zu vergleichen, so, daß hier die Anzahl der Neuntel, also der kleinern Theile, sich vermehrt, so würde man nun so verfahren: $\frac{1}{5}$ ist $\frac{2}{5}$ des Neuntels; wenn $\frac{2}{9}$ vorhanden sind, so ist $\frac{1}{5}$ nur $\frac{2}{5}$ von der Hälfte dieser $\frac{2}{9}$ oder $\frac{2}{\frac{2}{5}}$, das sind $4\frac{1}{2}$. Wenn $\frac{3}{9}$ da sind, so ist $\frac{1}{5}$ gleich $\frac{2}{5}$ von dem dritten Theile dieser $\frac{3}{9}$; das ist aber ganz dasselbe, als wenn ich sage $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{5}$, das sind $\frac{2}{15}$. Denn $\frac{4}{9}$ oder $\frac{2}{\frac{1}{5}}$ sind ebenfalls nur $\frac{3}{5}$ u. s. w. Man kann dies auch auf eine andere Weise darthun: nämlich $\frac{1}{5}$ ist $\frac{2}{5}$ eines Neuntels; zwei Neuntel müssen daher $2 \times \frac{5}{5} = \frac{10}{5}$; folglich ist $\frac{2}{5}$ eines Fünftels $\frac{2}{10}$ von $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{9}$ sind $3 \times 5 = \frac{15}{5}$; $\frac{2}{5}$ ist $\frac{2}{15}$ von $\frac{3}{5}$ u. s. f. Das sind aber ganz dieselben Verhältnisse, welche auch vorher Statt

fanden. Auf beide Weise kann man daher verfahren. Allein wenn, besonders bei mehrfachen Zählern, die Anzahl der Theile zu suchen ist, so ist die erste Art kürzer und weniger schwierig. Man setze z. B. $\frac{4}{5}$ mit $\frac{8}{9}$ in ein Verhältniß, so kann man so räsonniren: $\frac{4}{5}$ ist $\frac{1}{5} \times 4$; $\frac{4}{9}$ ist $\frac{1}{2} \times \frac{8}{9}$; folglich ist $\frac{4}{5}$ von $\frac{8}{9}$ $\frac{1}{10}$ oder $\frac{9}{10}$. Wären $\frac{2}{5}$ mit $\frac{7}{9}$ zu vergleichen, so würde man $\frac{3}{7}$ von $\frac{2}{5}$, das sind $3 \times 9 = \frac{27}{7}$, oder $\frac{2}{3}\frac{7}{5}$, nehmen müssen, um das Verhältniß am bestimmtesten und leichtesten zu finden und auszudrücken. Auch kann man gleich $\frac{3}{7}$ von 9 nehmen, das sind $3\frac{6}{7}$; die 9 waren Fünftel, also $3\frac{6}{7}$. In der Anwendung dieser Sätze können überhaupt vier Fälle Statt finden. a) Es kann gefragt werden: wie viel aliquote kleinere Theile von aliquoten größern in sich fassen; b) wie viel aliquote kleinere Theile in aliquoten größern enthalten seyen; c) wie viel Theile eine geringere Zahl aliquoter größerer Theile von einer größern aliquoter kleinerer Theile betrage; d) oder endlich: wie viel mal die erstern in den letztern enthalten seyen.

Uebungen.

[Für den ersten Fall.]

$\frac{1}{7} = \frac{4}{7}$ von $\frac{1}{4}$.
$\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$ von $\frac{1}{4}$.
$\frac{2}{9} = 2 \times 4 = \frac{8}{9}$ von $\frac{1}{4}$.
$\frac{1}{11} = \frac{4}{11}$ von $\frac{1}{4}$.
$\frac{2}{11} = 2 \times 4 = \frac{8}{11}$ von $\frac{1}{4}$ u. s. f.

$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$.

$\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ von $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ von $\frac{3}{4}$; folglich ist $\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ von $\frac{3}{4}$ oder $\frac{4}{15}$.

$\frac{2}{5} = \frac{2}{3}$ von $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$ ist $\frac{4}{5}$ von $\frac{3}{4}$; folglich sind $\frac{2}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$, oder $2\frac{2}{5}$, das sind $\frac{8}{15}$ mal.

$\frac{1}{7}$ ist von $\frac{1}{4} = \frac{4}{7}$; folglich $\frac{3}{7}$ von $\frac{3}{4} = \frac{4}{7}$.

$\frac{2}{7}$ ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{8}{7}$; $\frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ von $\frac{3}{4}$; folglich sind $\frac{2}{7} = \frac{2}{3}$ von $\frac{4}{4}$, das sind $2\frac{2}{3}$, oder $\frac{8}{21}$ (nämlich von $\frac{3}{4}$; das Ganze kann hier nicht in Anschlag gebracht werden.)

$\frac{3}{7} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{4}$.

$\frac{4}{7} = \frac{1}{3} > \frac{3}{7}$; $\frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ von $\frac{3}{4}$; folglich ist $\frac{4}{7} = \frac{1}{3}$ mehr, als $\frac{4}{7}$ von $\frac{3}{4}$; $4 + \frac{1}{3}$ von $\frac{4}{7} = 5\frac{1}{3}$ oder $\frac{16}{21}$.

$\frac{4}{5}$

$\frac{1}{9} = \frac{5}{9}$ von $\frac{1}{5}$; folglich sind $\frac{4}{9}$ von $\frac{4}{5} = \frac{5}{9}$.

$\frac{2}{9}$ sind $\frac{1}{2}$ von $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ von $\frac{4}{5}$; folglich $\frac{2}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9}$, das sind $2\frac{1}{2}$ oder $\frac{5}{18} \times \frac{4}{5}$.

$\frac{3}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{9}$; $\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ von $\frac{4}{5}$; folglich sind $\frac{3}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{9}$, das sind $3\frac{3}{4}$ oder $\frac{15}{36}$ von $\frac{4}{5}$.

$\frac{4}{9} = \frac{4}{5}$ von $\frac{5}{9}$.

$\frac{5}{9} = \frac{1}{4} > \frac{4}{9}$; $\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ von $\frac{4}{5}$; folglich sind $\frac{5}{9} = 1 + \frac{1}{4} \times \frac{5}{9}$, das sind $6\frac{1}{4}$ oder $\frac{25}{36} \times \frac{5}{9}$.

$\frac{6}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}$; $\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ von $\frac{4}{5}$; folglich sind $\frac{6}{9} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{5}{9}$, das sind $7\frac{1}{2}$ oder $\frac{15}{18}$ von $\frac{4}{5}$.

$\frac{7}{9} = \frac{3}{4} > \frac{4}{9}$; $\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ von $\frac{4}{5}$; folglich sind
$\frac{7}{9} = 1 + \frac{3}{4} \times 5 = 8 + \frac{3}{4}$ oder $\frac{3}{4}\frac{5}{8} \times \frac{7}{9}$.

Fünftel und Eilftel:

$\frac{1}{11}$ ist von $\frac{1}{5}$ $\frac{5}{11}$.
$\frac{3}{11} = \frac{3}{5}$ von $\frac{5}{11}$.
$\frac{1}{11} = \frac{5}{3}\frac{3}{11}$ oder $\frac{5}{33}$ von $\frac{3}{5}$.
$\frac{2}{11} = 3\frac{1}{3}\frac{3}{11}$ oder $\frac{10}{33}$ von $\frac{3}{5}$.
$\frac{3}{11} = \frac{5}{11}$ von $\frac{3}{5}$.
$\frac{4}{11} = 6\frac{2}{3}\frac{2}{11}$ oder $\frac{22}{33}$.
$\frac{5}{11} = \frac{25}{33}\frac{25}{11}$ oder $\frac{25}{33}$.
$\frac{6}{11} = \frac{30}{33}\frac{30}{11}$ oder $\frac{30}{33}$.

$\frac{5}{11} = \frac{6}{11}$ von $\frac{5}{6}$.
$\frac{6}{11} = 7\frac{1}{5}\frac{5}{11}$ oder $\frac{35}{55}$ von $\frac{5}{6}$.
$\frac{7}{11} = 8\frac{2}{5}\frac{2}{11}$ oder $\frac{42}{55}$ von $\frac{5}{6}$
u. s. f.

$\frac{6}{13} = 8\frac{2}{5}\frac{2}{13}$ oder $\frac{42}{65}$ von $\frac{5}{7}$.
$\frac{7}{13} = 11\frac{1}{5}\frac{1}{13}$ oder $\frac{56}{65}$ von $\frac{5}{8}$.
$\frac{7}{13} = 12\frac{3}{5}\frac{3}{13}$ oder $\frac{63}{65}$ von $\frac{5}{8}$.

[Für den zweiten Fall.]

$\frac{1}{4}$ enthält $\frac{1}{7}$ $1 + \frac{3}{4}$ mal.

$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{7}{4} \times \frac{1}{7}$; folglich sind $3 \times 7 = \frac{21}{4}$ oder $5\frac{1}{4} \times \frac{1}{7}$.

$\frac{3}{4} = 1\frac{1}{2} \times \frac{2}{4}$; $\frac{2}{4} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{7}$; folglich sind $\frac{3}{4} = 1\frac{1}{2} \times \frac{7}{4} = 10\frac{1}{14}$ oder $2\frac{5}{8} \times \frac{2}{7}$.

$\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ oder $1\frac{3}{4} \times \frac{3}{7}$; $\frac{3}{7} = \frac{3}{4}$ von $\frac{4}{7}$; folglich $\frac{3}{4} = 3 \times 7 = \frac{21}{4}$ oder $\frac{21}{16} = 1\frac{5}{16} \times \frac{4}{7}$; oder auch $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} < \frac{4}{4}$; $\frac{4}{4} = \frac{7}{4}$ von $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} < \frac{7}{4}$; $\frac{1}{4}$ von $7 = 1\frac{3}{4}$, Rest $5\frac{1}{4}$, das sind $\frac{21}{16}$ oder $1\frac{5}{16}$; folglich sind $\frac{3}{4}$ gleich $1\frac{5}{16} \times \frac{4}{7}$.

$\frac{3}{4} = \frac{7}{4} \times \frac{3}{7}$; $\frac{3}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{7}$; folglich sind $\frac{3}{4}$ $3 \times \frac{1}{4}$ oder $\frac{21}{20} = 1\frac{1}{20} \times \frac{5}{7}$ oder $\frac{3}{4} = \frac{2}{5} > \frac{5}{4}$; $\frac{5}{4} = \frac{7}{4} \times \frac{5}{7}$; $\frac{3}{4}$ ist folglich $\frac{2}{5} > \frac{7}{4}$, das sind $4\frac{1}{4} \times \frac{21}{20}$ von $\frac{5}{7}$.

$\frac{1}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{9}$.

$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{9}$; $\frac{3}{4} = 3 \times 9 = \frac{27}{4} \times \frac{1}{9}$; $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$; folglich sind $\frac{3}{4} = 6\frac{3}{4} \times \frac{1}{9}$.

$\frac{3}{4} = 1\frac{1}{2} \times \frac{2}{4}$; $\frac{2}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{9}$; folglich sind $\frac{3}{4} = 1\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} = 13\frac{1}{2} \times \frac{2}{9}$; $13\frac{1}{2} = 3\frac{3}{8}$; folglich $\frac{3}{4} = 3\frac{3}{8} \times \frac{2}{9}$; oder auch $\frac{3}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{4}$; $\frac{2}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{9}$; folglich $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{2} \times \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$, das sind $\frac{27}{8} = 3\frac{3}{8} \times \frac{3}{4}$.

[Da es keinen Unterschied macht, welche Zahl zum Multiplicator und welche zum Multiplicandus gemacht wird, so ist es auch hier völlig gleich, ob ich $\frac{3}{4} \times \frac{9}{4}$ oder $3 \times \frac{9}{4}$ spreche; es muß natürlich in beiden Fällen dasselbe Resultat sich ergeben. Uebrigens ist das Verfahren mit so genannten gebrochenen Zahlen dem Verfahren mit Ganzen völlig gleich. Es kann daher auch, wenn es die Verhältnisse erfordern, $\frac{4}{7} \times 9$ multiplicirt werden, das sind $3 \times 9 = \frac{27}{7}$ oder $5\frac{5}{7}$; denn die Multiplication mit aliquoten Theilen kann keine andern Theile geben, als die aliquoten Theile, welche den Multiplicator ausmachen, selbst sind. Wenn die 9 durch $\frac{4}{7}$ multiplicirt *) werden soll, so können unmöglich die 9 Ganzen vermehrt werden, sondern nur die Siebentel, die in ihr enthalten sind. $\frac{1}{7}$ von $9 = \frac{9}{7}$; $\frac{4}{7}$ muß daher diese $\frac{9}{7}$ 4 mal, das sind $\frac{36}{7}$, geben; das sind aber wiederum $5\frac{1}{7}$; $\frac{5}{7}$ giebt $5 \times 9 = \frac{45}{7}$, das sind $6\frac{3}{7}$ u. s. f. So viel also aliquote Theile vorhanden sind, so viel mal wird der Multiplicandus wiederholt, und die Qualität oder der Werth der aliquoten Theile des Multiplicators bestimmt den Werth der durch die Multiplication selbst sich

*) Wenn man das Wort multipliciren in seiner eigenthümlichen Bedeutung faßt, so kann die Zahl 9 durch $\frac{4}{7}$ freilich eigentlich nicht vermehrt werden; weil $\frac{4}{7}$ noch nicht ein Ganzes, folglich $\frac{4}{7} \times 9$ auch noch nicht 1×9 geben kann. Indeß ist der Ausdruck einmal zur Bezeichnung einer arithmetischen Operation gestempelt, und man kann daher gar wohl von der Urbedeutung absehen; anderer Seits ist es auch ein der Vermehrung analoges Verfahren, denn $\frac{1}{7} \times 9$ ist nichts anders, als ein mal der Inbegriff des Siebentels von jeder Einheit, deren 9 vorhanden sind. (S. 32. Anm.)

erzeugenden Anzahl von Theilen. Enthält der Multiplicator Siebentel, so werden es Siebentel; besteht er aus Achteln, so enthält auch das Produkt lauter Achtel u. s. f. Ist der Multiplicandus selbst nur der Ausdruck einer Anzahl aliquoter Theile (Zähler), so bleibt dasselbe Verhältniß, nur daß dann ein Doppelbruch, oder die Bezeichnung von Theilen der Theile, entsteht; so ist dann $\frac{4}{7} \times \frac{9}{4} = 4 \times 9 = \frac{36}{4}$. Die 9 ist jetzt nicht mehr Ausdruck des Ganzen, sondern der Viertel; folglich sind auch die Siebentel Theile der Viertel.]

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{9}.$$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{4}$; $\frac{4}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{4}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{4}{9}$;
$\frac{3}{4} = 3 \times 9 = \frac{27}{4}$, oder $\frac{27}{16}$, d. i. $1\frac{11}{16} \times \frac{4}{9}$.

$\frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4}$; $\frac{5}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{5}{9}$; $\frac{3}{4} = 3 \times 9 = \frac{27}{4}$,
oder $\frac{27}{20}$, das sind $1\frac{7}{20} \times \frac{5}{9}$.

$\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ oder $\frac{1}{2} \times \frac{6}{4}$; $\frac{6}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{6}{9}$; $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$
oder $\frac{9}{8}$, das ist $1\frac{1}{8} \times \frac{6}{9}$.

$= 4 + \frac{2}{5} \times 4$, das sind $5\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}$.
$\frac{4}{5} = 2 \times \frac{7}{5}$, das sind $2\frac{4}{5} \times \frac{3}{7}$.
$\frac{4}{5} = \frac{4}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{15} = \frac{28}{15}$ oder $1 + \frac{13}{15} \times \frac{3}{7}$.
$\frac{4}{5} = \frac{7}{5}$ oder $1\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$.
$\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{25}$, das sind $\frac{28}{25}$ oder $1\frac{3}{25} \times \frac{5}{7}$.

Fünftel und Eilftel.

$\frac{3}{5} = 3 \times 11 = \frac{33}{5}$, das sind $6\frac{3}{5} \times \frac{1}{11}$.
$\frac{2}{5} = 2 \times 11 = \frac{22}{5}$ oder $4\frac{2}{5} \times \frac{1}{11}$.
$\frac{3}{5} = \frac{3}{2} \times 11 = \frac{33}{10}$ oder $\frac{33}{10}$, das sind $3\frac{3}{10} \times \frac{2}{11}$.
$\frac{3}{5} = \frac{3}{3}$ oder $1 \times \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5} \times \frac{3}{11}$.
$\frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{5} = \frac{33}{20}$ oder $\frac{33}{20}$ das ist $1\frac{13}{20} \times \frac{4}{11}$.
$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{11}{5} = \frac{33}{25}$ oder $\frac{33}{25}$, das sind $1\frac{8}{25} \times \frac{5}{11}$.
$\frac{3}{5} = \frac{3}{6}$ oder $\frac{1}{2} \times \frac{11}{5} = \frac{11}{10}$ oder $\frac{11}{10}$, das sind $1\frac{1}{10} \times \frac{6}{11}$.

Um in gewissen Fällen sich der Mühe des theilweisen Auflösens zu überheben, kann man sich auch an die Produkte selbst halten. Es ist klar, daß diese sich allezeit nach ihren Factoren, das ist nach denjenigen Zahlen richten müssen, durch welche sie erzeugt sind. Wenn uns nun das Produkt gewisser Factoren eben so bekannt ist, als das Verhältniß der verschiedenen Factoren selbst, so kann man nur gleich das Produkt des einen Factors in eben demselben Verhältnisse vermehren oder vermindern, in welchem derselbe dem andern entweder sich nähert oder ihn übersteigt. Wenn in dem obigen Beispiele $\frac{3}{5}$ $6\frac{3}{5} \times \frac{1}{11}$ enthalten, so werden sie $\frac{2}{11}$ nur ein halb mal so viel enthalten, weil hier einer der Factoren, das sind $\frac{2}{11}$, dem andern, d. i. den $\frac{3}{5}$, noch ein mal so nahe gerückt ist; folglich kann der Quotient (die Zahl, welche zeigt, wie viel mal eine in der andern enthalten sey) nur die Hälfte des Vorhergehenden seyn. Nun ist die Hälfte von $6\frac{3}{5} = 3\frac{3}{10}$; folglich sind $\frac{3}{5} = 3\frac{3}{10}$ mal $\frac{2}{11}$. Wenn dieselbe Zahl aber vier mal näher rückt, so daß nun die Frage wäre: $\frac{3}{5}$, wie viel mal $\frac{4}{11}$? so sieht man, daß dann $\frac{1}{11}$ nur ein Viertel der $\frac{4}{11}$ ist, und daß folglich auch der Quotient nur ein Viertel des erstern, also $\frac{1}{5}$ von $6\frac{3}{5}$, d. i. $\frac{6}{4}$ und $\frac{3}{4}$, das sind $\frac{33}{20}$ oder $1\frac{13}{20}$, betragen müsse. Eben so läßt es sich im entgegengesetzten Falle verfahren. Wenn man z. B. weiß, daß $\frac{3}{8} = 1 + \frac{3}{8} \times \frac{3}{11}$ enthalten, so kann man gleich schließen, daß $\frac{3}{4}$ das doppelte Produkt, also $2 + \frac{6}{8}$, $\frac{3}{2}$ das vierfache, also $4\frac{12}{8}$ oder $5\frac{1}{2}$ u. s. f. geben. Denn hier entfernt sich das Verhältniß der Größe der aliquoten Theile; der Factor wird größer, folglich auch das Produkt. Dasselbe gilt auch, wenn bloß die Anzahl der aliquoten Theile steigt. Wenn z. B., anstatt der 3, $\frac{7}{8}$ gegeben werden, so wird der Factor $2\frac{1}{3}$ mal wiederholt, folglich auch das Produkt; also $2 + \frac{1}{3} \times 1\frac{3}{8} = 2\frac{1}{3} + \frac{4}{8} = 2\frac{5}{6}$.

[Für den dritten Fall.]

$\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{5}$.

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{5}$; folglich ist $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$ oder $\frac{5}{6}$ von $\frac{2}{5}$.

$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} < \frac{3}{3}$; $\frac{3}{3} = \frac{5}{3}$ von $\frac{3}{5}$; folglich $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} > \frac{5}{9}$, das sind $\frac{5}{15}$ oder $\frac{5}{9}$ von $\frac{3}{5}$.

$\frac{4}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{5}$; $\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ von $\frac{4}{3}$, folglich $\frac{1}{4}$ von $\frac{5}{3}$, d. i. $\frac{5}{12}$ oder $\frac{5}{12} \times \frac{4}{5}$.

$\frac{2}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{5}$. $= \; \times \; =$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} > \frac{3}{3}$; $\frac{3}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{5}$; folglich sind $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{3}$, $3\frac{1}{3}$ oder $\frac{10}{9}$; oder auch $\frac{2}{3}$ sind $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{3}$; $\frac{3}{3}$ sind $\frac{5}{3} \times \frac{3}{5}$; folglich $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{9} \times \frac{3}{5}$.

$\frac{4}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ von $\frac{4}{3}$; folglich $\frac{1}{2}$ von $\frac{5}{3} = \frac{5}{6}$ oder $\frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$.

Siebentel und Dreizehntel.

$\frac{1}{7} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{13}$.

$\frac{2}{7} = \frac{13}{7} \times \frac{2}{13}$; $\frac{1}{7} = \frac{1}{2}$ von $\frac{2}{7}$; folglich $\frac{1}{2}$ von $\frac{13}{7} = \frac{13}{14}$ oder $\frac{13}{14} = \frac{2}{7}$.

$\frac{3}{7} = \frac{13}{7} \times \frac{3}{13}$; $\frac{1}{7} = \frac{1}{3}$ von $\frac{3}{7}$; folglich $\frac{1}{3}$ von $\frac{13}{7} = \frac{13}{21}$ oder $\frac{13}{21} \times \frac{3}{7}$. $\frac{1}{8} = \frac{13}{104} \times \frac{4}{7}$, $\frac{13}{35} \times \frac{5}{13}$ u. s. f.

$\frac{2}{7} = \frac{13}{7} \times \frac{2}{13}$.

$\frac{2}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{7}$; $\frac{3}{7} = \frac{13}{7} \times \frac{3}{13}$; folglich $\frac{2}{3} = 2 \times 13 = \frac{26}{21}$ oder $\frac{26}{21} \times \frac{3}{7}$.

$\frac{4}{7} = \frac{13}{7} \times \frac{4}{13}$; $\frac{2}{7} = \frac{1}{2}$ von $\frac{4}{7}$; folglich $\frac{1}{2} \times \frac{13}{7}$, d. i. $\frac{13}{28}$ oder $\frac{13}{14} \times \frac{2}{7}$.

$\frac{5}{7} = \frac{13}{7} \times \frac{5}{13}$; $\frac{2}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7}$; folglich $\frac{2}{5} \times 13 = \frac{26}{35}$ oder $\frac{26}{35} \times \frac{5}{7}$.

$\frac{6}{7} = \frac{13}{7} \times \frac{6}{13}$; $\frac{2}{7} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{7}$; folglich $\frac{1}{3} \times 13 = \frac{13}{21}$ oder $\frac{13}{21} \times \frac{6}{13}$.

$\frac{7}{7} = \frac{13}{7} \times \frac{7}{13}$; $\frac{1}{1} = \frac{7}{7} \times \frac{7}{7}$; folglich $\frac{7}{7} \times \frac{13}{7} = \frac{26}{49}$ oder $\frac{26}{49} \times \frac{7}{13}$.

$\frac{8}{7} = \frac{13}{7} = \frac{13}{28} \times \frac{8}{13}$.
$\frac{9}{7} = \frac{26}{7} = \frac{26}{63} \times \frac{9}{13}$.
$\frac{10}{7} = \frac{13}{7} = \frac{13}{35} \times \frac{10}{13}$.
$\frac{11}{7} = \frac{26}{14} = \frac{26}{77} \times \frac{11}{7}$.

$\frac{12}{7} = \frac{13}{14} \times \frac{6}{13}$.
$\frac{13}{7} = \frac{13}{21} \times \frac{8}{13}$.
$\frac{14}{7} = \frac{13}{14} \times \frac{8}{13}$.
$\frac{15}{7} = \frac{52}{28} \times \frac{9}{13}$.

u. s. w.

[Für den vierten Fall.]

$\frac{1}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{5}$.

$\frac{3}{8} = 3 \times 5 = \frac{15}{8}$; $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.

$\frac{5}{8} = 5 \times 5 = \frac{25}{8}$, das sind $3\frac{1}{8} \times \frac{1}{5}$.

$\frac{7}{8} = 7 \times 5 = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8} \times \frac{1}{5}$.

$\frac{2}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5}$.

$\frac{3}{8} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{8}$; $\frac{2}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5}$; folglich sind

$\frac{3}{8} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$ oder $\frac{15}{16} \times \frac{2}{5}$.

$\frac{4}{8} = 2 \times \frac{2}{8}$; $\frac{2}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5}$; folglich sind

$\frac{4}{8} = 2 \times 5 = \frac{10}{8}$ oder $1\frac{1}{4} \times \frac{2}{5}$.

$\frac{5}{8} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{8}$; $\frac{2}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5}$; folglich sind

$\frac{5}{8} = \frac{5}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{16}$ oder $\frac{25}{16} = 1\frac{9}{16} \times \frac{2}{5}$.

$\frac{6}{8} = 3 \times \frac{2}{8}$; $\frac{2}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5}$; folglich sind

$\frac{6}{8} = 3 \times 5 = \frac{15}{8}$, das sind $1\frac{7}{8} \times \frac{2}{5}$.

$\frac{7}{8} = \frac{7}{2} \times \frac{2}{8}$; $\frac{2}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5}$; folglich sind

$\frac{7}{8} = \frac{7}{2} \times 5 = \frac{35}{16}$ oder $\frac{35}{16} = 2\frac{3}{16} \times \frac{2}{5}$.

$\frac{3}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5}$.

$\frac{4}{8} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{8}$; $\frac{3}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5}$; folglich sind

$\frac{4}{8} = 4 \times \frac{5}{24} = \frac{20}{24}$ oder $\frac{20}{24} \times \frac{3}{5}$.

$\frac{5}{8} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{8}$; $\frac{3}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5}$; folglich sind

$\frac{5}{8} = \frac{5}{3} \times 5 = \frac{25}{24}$, d. s. $\frac{25}{24}$ oder $1\frac{1}{24} \times \frac{5}{8}$.

$\frac{6}{8} = 2 \times \frac{3}{8}$; $\frac{3}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5}$; folglich sind

$\frac{6}{8} = 2 \times 5 = \frac{10}{8}$ oder $1\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$.

$\frac{7}{8} = \frac{7}{3} \times \frac{3}{8}$; $\frac{3}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5}$; folglich sind

$\frac{7}{8} = \frac{5}{3} = \frac{25}{24}$ oder $\frac{25}{24}$, d. i. $1\frac{1}{24} \times \frac{3}{5}$.

$\frac{7}{8} = \frac{7}{4} \times \frac{4}{8}$; $\frac{4}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{5}$; folglich sind

$\frac{7}{8} = \frac{7}{4} \times 5 = \frac{35}{32}$ oder $\frac{35}{32}$, d. i. $1\frac{3}{32} \times \frac{5}{8}$.

Aufgaben.

a) $2\frac{1}{3}$, wie viel mal enthalten sie $1\frac{2}{5}$?

Antw. $1\frac{2}{3}$ mal. Denn $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$; $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$. Da $\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ ist, so sind auch $\frac{7}{3} = 1\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$.

b) $13\frac{6}{7}$, wie viel sind es Theile von $24\frac{1}{4}$?

Antw. $\frac{4}{7}$. Denn $13\frac{6}{7} = \frac{97}{7}$; $24\frac{1}{4} = \frac{97}{4}$. Da $\frac{1}{7} = \frac{4}{97}$ von $\frac{1}{4}$, so sind auch $\frac{97}{7} = \frac{4}{97}$ von $\frac{97}{4}$.

c) $\frac{4}{9}$, wie viel mal sind sie enthalten in $1\frac{1}{4}$?

Antw. $2\frac{13}{16}$. Denn $1\frac{1}{4}$ sind $\frac{5}{4}$; $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} \times \frac{4}{4}$; $\frac{4}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{4}{9}$; folglich sind $\frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{45}{4}$ oder $\frac{45}{16}$, das sind $2\frac{13}{16}$. Oder auch: $\frac{4}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{4}{9}$; $\frac{5}{4} = \frac{1}{4} > \frac{4}{4}$; folglich $\frac{1}{4} > \frac{9}{4}$; $\frac{1}{4}$ von $9 = 2\frac{1}{4}$; diese zu $9 = 11\frac{1}{4}$; $11\frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}\frac{1}{4} \times 4$; $\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$; $\frac{3}{4} = 3 \times 4 = \frac{12}{16}$; $12 + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$; folglich sind $\frac{5}{4} = 2\frac{13}{16} \times \frac{4}{9}$.

d) $3\frac{1}{5}$, wie viel sind es Theile von $7\frac{3}{7}$?

Aufl. $3\frac{1}{5} = \frac{16}{5}$; $7\frac{3}{7} = \frac{52}{7}$; $\frac{16}{5}$ ist von $\frac{16}{7} = \frac{7}{5}$; folglich sind $\frac{16}{5} = \frac{16}{52}$ von $\frac{7}{5}$; $\frac{8}{52} \times \frac{7}{5} = \frac{56}{52}$ oder $1\frac{4}{52}$ ($\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$); $\frac{16}{52} = 2 \times \frac{8}{52}$; folglich $2 \times 1\frac{1}{13} = 2\frac{2}{13}$; folglich sind $3\frac{1}{5}$ von $7\frac{3}{7} = 2\frac{2}{65}$ oder $\frac{28}{65}$.

e) $8\frac{1}{6}$, wie viel mal $3\frac{2}{5}$?

Aufl. $8\frac{1}{6} = \frac{49}{6}$; $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$; $\frac{17}{6} = \frac{1}{6} > \frac{17}{5}$; folglich sind $\frac{49}{6} = \frac{1}{6}$ weniger als $\frac{49}{5}$; $\frac{1}{6}$ von $49 = 8\frac{1}{6}$; diese weniger, bleiben $41 + \frac{5}{6}$; diese sind $2\frac{7 + \frac{5}{6}}{17}$ mal $\frac{17}{16}$ oder $2 + \frac{47}{102}$.

f) $7\frac{6}{11}$, wie viel mal enthalten sie $3\frac{3}{4}$?

Auflösung: $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$; $7\frac{6}{11} = \frac{83}{11}$; $\frac{15}{11}$ ist von $\frac{15}{4} = \frac{4}{11}$; $83 = 5\frac{7}{15} \times 15$; folglich $5\frac{7}{15} \times \frac{4}{11}$; $5 \times \frac{4}{11} = \frac{20}{11}$; $\frac{7}{15} \times 4 = \frac{28}{15}$ oder $1\frac{13}{165}$;

$20 + 1\frac{13}{175} = 21\frac{13}{175}$, das sind $\frac{2}{175}$ weniger als $\frac{22}{11}$ oder zwei Ganze; $\frac{2}{175}$ sind aber $\frac{2}{175}$; folglich ist $7\frac{6}{11} = 2 - \frac{2}{175} \times 3\frac{3}{4}$.

[Absichtlich wählte ich hier schwierigere Problemata, um einer Seits zu zeigen, wie auch diese sich lösen lassen, anderer Seits, um die Regel, auf welche sich das ganze Verfahren gründet, durch alle Theile durchzuführen.]

Aufgaben.

α) $17\frac{3}{4} : 7\frac{8}{9} = 800 : x$.

Aufl. $17\frac{3}{4} = \frac{71}{4}$; $7\frac{8}{9} = \frac{71}{9}$. Da $\frac{1}{9}$ gleich ist $\frac{4}{9}$ eines Viertels, so müssen auch $\frac{71}{9} = \frac{4}{9}$ von $\frac{71}{4}$ seyn. Nun sind $\frac{71}{4}$ gleich 800; $\frac{71}{9}$ werden folglich $\frac{4}{9}$ von 800 seyn; $\frac{4}{9}$ von 8 sind $4 \times 8 = \frac{32}{9} = 3\frac{5}{9}$; das sind hier $300 + \frac{5}{9} \times 100$, das sind $5 \times 11 + \frac{1}{9} = 55 + \frac{5}{9}$; $300 + 55\frac{5}{9} = 255\frac{5}{9}$. Das ganze Verhältniß ist demnach $17\frac{3}{4} : 7\frac{8}{9} = 800 : 355\frac{5}{9}$.

β) $7\frac{8}{9} : 17\frac{3}{4} = 800 : x$.

Aufl. $7\frac{8}{9} = \frac{71}{9}$; $17\frac{3}{4} = \frac{71}{4}$. Da $\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{9}$, so sind $71 = 2\frac{1}{4} = \frac{71}{9}$; $\frac{71}{9} = 800$; folglich sind $\frac{71}{4} = 2 + \frac{1}{4} \times 800$; $2\frac{1}{4} \times 8 = 18$; $2\frac{1}{4} \times 800 = 1800$. Das Verhältniß ist demnach $7\frac{8}{9} : 17\frac{3}{4} = 800 : 1800$.

γ) $9\frac{1}{11} : 3\frac{4}{7} = 200 : x$.

Auflös. $9\frac{1}{11} = \frac{100}{11}$; $3\frac{4}{7} = \frac{25}{7}$. Nun sind $\frac{25}{7} = \frac{11}{7}$ von $\frac{25}{11}$; $\frac{25}{11}$ ist aber nur $\frac{1}{4}$ von $\frac{100}{11}$; folglich sind die $\frac{11}{7}$ auch nur $\frac{11}{7}$ des Viertels. Es ist daher diejenige Zahl von 200 zu suchen, welche $\frac{11}{7}$ oder $1\frac{4}{7}$ beträgt; $\frac{1}{4}$ von 200 ist 50; $\frac{11}{7}$ ist $1 + \frac{4}{7} \times 50$; $\frac{1}{7}$ von $50 = 7\frac{1}{7}$; $\frac{4}{7} = 4 \times 7\frac{1}{7} = 28\frac{4}{7}$; $50 + 28\frac{4}{7} = 78\frac{4}{7}$. Das Verhältniß ist also $9\frac{1}{11} : 3\frac{4}{7} = 200 : 78\frac{4}{7}$.

δ) $3\frac{4}{7}$

δ) $3\frac{4}{7} : 9\frac{1}{11} = 200 : x.$

Aufl. $3\frac{4}{7} = \frac{25}{7}$; $9\frac{1}{11} = \frac{100}{11}$; $\frac{25}{7} = \frac{11}{7}$ von $\frac{25}{11}$; $\frac{100}{11} = 4 \times \frac{25}{11}$; folglich $4 \times \frac{7}{11} = \frac{28}{11}$, das ist $2\frac{6}{11}$. Da nun $\frac{25}{7} = 200$, so müssen $\frac{100}{11} = 2\frac{6}{11} \times 200$, d. s. $400 + 6 \times 2 = \frac{12}{11}$, oder $1 + \frac{1}{11} \times 100 = 109\frac{1}{11}$; $400 + 109\frac{1}{11} = 509\frac{1}{11}$; folglich $3\frac{4}{7} : 9\frac{1}{11} = 200 : 509\frac{1}{11}$.

ε) $3\frac{4}{9} : 8\frac{2}{5} = 100 : x.$

Aufl. $3\frac{4}{9} = \frac{31}{9}$; $8\frac{2}{5} = \frac{42}{5}$; $\frac{31}{5} = \frac{9}{5} \times \frac{31}{9}$; $\frac{42}{5}$ sind $\frac{11}{31} > \frac{31}{5}$; folglich $\frac{11}{31} \times \frac{2}{5}$; $11 \times 9 = \frac{99}{31}$, das sind $3 + \frac{6}{31}$; diese zu $9 = 12\frac{6}{31}$, das sind $2 + \frac{2}{5} + \frac{6}{31}$; $3\frac{4}{9} = 100\frac{42}{5}$; folgl. $2 + \frac{2}{5} + \frac{6}{31} \times 100 = 200 + 2 \times 20 + \frac{6}{31} \times 20$; $2 \times 20 = 40$; $\frac{6}{31} \times 20 = = = 3 \times 1 + \frac{9}{31} = = = 3\frac{27}{31}$; $200 + 40 + 3\frac{27}{31} = 243\frac{27}{31}$. Es verhält sich demnach $3\frac{4}{9} : 8\frac{2}{5} = 100 : 243\frac{27}{31}$. Die Auflösung konnte auch so geschehen: $\frac{31}{5} = 1 + \frac{4}{5} \times \frac{31}{9}$; folglich auch $1 \times \frac{4}{5} \times 100 = 180$. Nun sind aber $\frac{42}{5}$ noch $\frac{11}{31}$ mehr als $\frac{31}{5}$; folglich müssen auch die 180 $\frac{11}{31}$ vermehrt werden. $\frac{2}{31}$ von $18 = \frac{36}{31}$, oder $1\frac{5}{31}$; $11 = 5\frac{1}{2} \times 2$; folglich $5 + \frac{1}{2} \times 1\frac{5}{31} = 5\frac{1}{2} + \frac{27\frac{1}{2}}{31}$; $\frac{1}{2} = \frac{15\frac{1}{2}}{31} + \frac{27\frac{1}{2}}{31} = 1\frac{12}{31}$; $5 + 1\frac{12}{31} = 6\frac{12}{31}$; folglich $60 + 12 \times 10 = 120$, das sind $3\frac{27}{31}$; $180 + 60 + 3\frac{27}{31} = 243\frac{27}{31}$.

[Es konnte das Resultat auch so gefunden werden, daß man $\frac{1}{31}$ von 180 suchte, d. i. $5\frac{25}{31}$. Jetzt waren die $\frac{11}{31} = 11 \times 5 = 55 + 11 \times \frac{25}{31}$. Die $11 \times \frac{25}{31}$ konnten kürzer so gefunden werden, daß man den Satz gleich umkehrte, und als $\frac{25}{31}$ von 11 behandelte, das sind $\frac{6}{31}$ weniger als 11. Da nun $\frac{6}{31}$ von $11 = 6 \times 11 = \frac{66}{31}$, die letztern aber $2\frac{4}{31}$ geben, so durften diese nur den 11 Ganzen entzogen werden, so blieben noch $8\frac{27}{31}$; $55 + 8\frac{27}{31} = 63 + \frac{27}{31}$.]

ζ) $3\frac{2}{7} : 9\frac{5}{12} = 90 : x.$

Aufl. $3\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$; $9\frac{5}{12} = \frac{113}{12}$; $\frac{23}{12} = \frac{7}{12}$ von $\frac{23}{7}$; $113 = 4 + \frac{21}{23} \times 23$; folgl. $4 + \frac{21}{23} \times \frac{7}{12}$,

das sind $\frac{2}{2\frac{2}{3}} < 5 \times 7 = 35 - \frac{14}{2\frac{2}{3}} = 34 + \frac{9}{2\frac{2}{3}}$;
$34 + \frac{9}{2\frac{2}{3}} = 2 + \frac{10}{12} + \frac{9}{\frac{23}{12}} \times 12$. Da $\frac{12}{7} = 90$,
so ist $43 + \frac{10}{12} + \frac{90}{\frac{23}{12}} = 2 \times 90 = 180$;
$\frac{1}{12} = 7\frac{1}{2}$; folglich $10 \times 7\frac{1}{2} = 75$; $\frac{9}{2\frac{2}{3}} \times 7\frac{1}{2}$
oder $\frac{15}{2} = \frac{135}{2}$; $\frac{1}{2} = \frac{67\frac{1}{2}}{23} = 2 + \frac{21\frac{1}{2}}{23}$;
$180 + 75 + 2\frac{21\frac{1}{2}}{23} = 257\frac{43}{46}$; folglich
$3\frac{2}{7} : 9\frac{5}{12} = 90 : 257\frac{43}{46}$.

.) $9\frac{5}{12} : 3\frac{2}{7} = 90 : x$.

Aufl. $9\frac{5}{12} = \frac{113}{12}$; $3\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$; $\frac{23}{7} = \frac{5}{7} > \frac{23}{12}$;
folglich $\frac{23 + \frac{5}{7}}{12}$ von $\frac{113}{12}$; $\frac{5}{7}$ von $23 = 5 \times 3 + \frac{2}{7}$
$= 16 + \frac{3}{7}$; $23 + 16\frac{3}{7} = 39\frac{3}{7}$; $\frac{1}{113}$ von
$9 = \frac{9}{113}$; $\frac{9}{113} = 39 \times 9 = \frac{270 + 80}{113} = \frac{226}{113} = 2$.
Nun bleiben noch $44 + 80 = \frac{124}{113}$, das sind
wieder $1\frac{11}{113}$; folglich sind $\frac{22}{113}$ von $9 = 2 + 1\frac{11}{113}$,
od. $3\frac{11}{113}$; von 90 sind dies $30 + 11 \times 10 = \frac{110}{113}$.
Es bleiben aber oben noch $\frac{3}{7}$ eines Hundert und
Dreizehntels zurück. Da $\frac{1}{113}$ von $90 = \frac{90}{113}$,
so müssen $\frac{3}{7}$ von 90, d. s. $3 \times 10 + 2\frac{6}{7} = 38 + \frac{4}{7}$,
$\frac{3}{7}$ eines $\frac{1}{113}$tels seyn. $30 + \frac{110 + 38\frac{4}{7}}{113} = 31\frac{35\frac{4}{7}}{113}$.
Es verhält sich demnach $9\frac{5}{12} : 3\frac{2}{7} = 90 : 31\frac{35\frac{4}{7}}{113}$.

Die Hauptabsicht dieser ganzen Reihenfolge von Uebungen ist vollkommen erreicht, wenn das Wesen der Zahl, das heißt, die Anschauung der rein arithmetischen Verhältnisse, vollkommen deutlich geworden ist. Dann finden sich auch noch gewöhnlich andere Vortheile, die entweder die verwickeltern Verhältnisse verdeutlichen, und dadurch erleichtern, oder verkürzen. Bis hieher muß aber ein Jeder geführt werden, bei dem das so genannte Rechnen etwas mehr seyn soll, als etwa ein bloßer Nothbehelf für den zukünftigen Hausbedarf. Es war mir angelegentliche Sorge, keine

Stufe zu überspringen, und ich bin überzeugt, daß der psychologisch logische Zusammenhang auch für jede Wissenschaft gelten muß.

[Es bleibt noch eine Stufe für die so genannte höhere Arithmetik übrig, die ich aber hier übergehen muß, weil sie einer Seits außer dem Horizonte derjenigen liegt, für welche dieses Buch bestimmt ist, anderer Seits, weil die Hauptmomente derselben dennoch auf eine Weise hier gegeben sind, daß es einem Lehrer, der sich an den vorgezeichneten Gang gehalten hat, nicht schwer werden kann, auf gleichen Grundsätzen anzubauen. Ich behalte mir es aber noch vor, über lang oder kurz, die höheren Rechnungen anzuschließen, und auf gleiche Weise durchzuführen.]

Ueber doppelte Verhältnisse.

Es wird vielleicht nicht unzweckmäßig seyn, hier noch einige Uebungen anzuhängen, welche sich namentlich mit doppelten Verhältnissen beschäftigen, die einzeln schon vorhanden gewesen sind, aber nicht in dieser Verbindung. Es kommen häufig verwickeltere Verhältnisse vor, die auf einfache zu reduciren, und dann erst genau zu bestimmen sind. Es können nämlich zwei Größen, die schon an sich selbst in einem Verhältnisse stehen, mit einer dritten verglichen werden; dadurch entsteht ein doppeltes Verhältniß, das am Ende in ein einfaches gebracht werden muß, damit es desto leichter zu behandeln sey. Es kann z. B. ein Verhältniß geben, wie nachstehendes:

$$1\frac{3}{7} + \frac{3}{4} : 6 = 70 : x;$$

oder:

$$1\frac{3}{7} - \frac{3}{4} : 6 = 70 : x.$$

Im ersten Falle sieht man, daß $1\frac{3}{7}$ noch um $\frac{3}{4}$ vermehrt werden soll. Ein einfaches Verhältniß wäre z. B. $1\frac{3}{7} : 6$ u. s. f. Wenn aber das erste Glied, d. i. $1\frac{3}{7}$, durch eine andere Zahl, z. B. durch $\frac{1}{3}$, vermehrt werden sollte, so, daß dieses Drittel nicht als ein für sich bestehender Theil, sondern als aliquoter Theil der ganzen als Einheit aufgefaßten Summe, hier also als $\frac{1}{3}$ von $1\frac{3}{7}$, angesehen werden müßte, was man durch den Einschluß $(1\frac{3}{7}) + \frac{1}{3}$ bezeichnen kann, so wird die als Einheit aufgefaßte Zahl mit dem gegebenen aliquoten Theile zusammen genommen, und dann mit der gegebenen andern, das ist hier mit der 6, in ein einfaches Verhältniß gesetzt. Da hier $1\frac{3}{7}$ vorhanden sind, so wird $\frac{1}{3}$ von 1 eben so wohl, als ein Drittel von $\frac{3}{7} = \frac{1}{7}$, genommen, so, daß nun $1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{7}$, das sind $1\frac{19}{21}$, das einfache Verhältniß ausdrücken. Ist nun die Frage: wie viel mal das erstere Glied, also $(1\frac{3}{7}) + \frac{1}{3}$, in 6 enthalten sey, so kann man auf verschiedene Weise das Resultat finden. Man kann nämlich die 6 in lauter Ein und Zwanzigstel auflösen, so, daß $1\frac{19}{21} = \frac{40}{21}$ mit $6 = \frac{126}{21}$ zu vergleichen wären; oder, weil sich diese Zahlen gerade durch $\frac{2}{63}$ aufheben, auch so ausdrücken; 63 ist aber $2 + \frac{3}{20} \times 20$; oder man kann auch sogleich den zunächst gelegenen aliquoten Theil der größern Zahl nehmen, und mit diesem die vorhergehende Zahl vergleichen. Da in dem gegebenen Beispiele die erste Proportionalzahl beinahe 2 beträgt, so wird man auch diese Zahl am zweckmäßigsten zur ersten Vergleichung wählen. Man löset nun ebenfalls $1\frac{19}{21}$ in $\frac{40}{21}$, die 2 aber in $\frac{42}{21}$ auf, und spricht 42 ist $1 + \frac{1}{20}$ mal 40; folglich auch $1\frac{1}{20} \times 1\frac{19}{21}$. Da aber $6 = 3 \times 2$ ist, so muß es $3 \times 1 + \frac{1}{20}$, d. i. $3\frac{3}{20} \times (1\frac{3}{7}) + \frac{1}{3}$, seyn. Eine dritte Art des Verfahrens ist noch möglich, und in gewissen

Fällen besonders sehr brauchbar. Man räsonnirt nämlich so: Es ist $1\frac{3}{7}$ vorhanden, und davon noch $\frac{1}{3}$, die in 6 enthalten seyn sollen. Wäre das Drittel nicht vorhanden, so würde man nur alles in Siebentel aufzulösen haben, um schnell die erforderliche Operation zu vollbringen. Das Drittel bringt aber die letzte Proportionalzahl, das ist hier die 6, der erstern, d. i. $1\frac{3}{7}$, gerade um $\frac{1}{3}$ näher. Wenn ich daher zuerst dasselbe nicht berücksichtige, sondern vielmehr zuletzt dem Ganzen entziehe, so wird das gesuchte Produkt ebenfalls richtig herauskommen. $1\frac{3}{7}$ ist $= \frac{10}{7}$; 6 Ganze sind (nach §. 23.) $\frac{42}{10}$ oder $\frac{2}{5}$ weniger als $7 \times \frac{10}{7}$; $(7 - \frac{2}{5}) = 4\frac{1}{5}$; dies wäre das Ganze, wenn jenes Drittel nicht vorhanden wäre. Da die erste Proportionalzahl nun $\frac{1}{3}$ mehr beträgt, so muß man sich denken, daß die Zahl ein Drittel zu viel, d. i. $\frac{4}{3}$ anstatt $\frac{3}{3}$, hat; dies vierte Drittel, $\frac{1}{4}$ von $\frac{4}{3}$, muß den $4\frac{1}{5}$ wieder abgenommen werden; daher $(4\frac{1}{5} - \frac{1}{4}) = 3\frac{3}{5}$ oder $3\frac{12}{20}$.

Man kann sich also im Allgemeinen die Regel merken:

Wenn die erste und kleinste von zwei gegebenen Verhältnißzahlen ein gewisses Verhältniß in sich faßt, so, daß dieselbe durch einen aliquoten Theil (wie in dem obigen Beispiele $1\frac{3}{7}$ durch $\frac{1}{3}$) wiederholt wird, so muß das gefundene Ganze gerade um einen solchen Theil zu viel betragen. Dieser Theil muß daher der ganzen Summe wieder genommen werden. Da aber der Werth eines jeden einzelnen Theiles von der Anzahl aliquoter gleicher Theile abhängt, und die ganze Summe

nun einen aliquoten Theil mehr hat (in dem vorigen Beispiele war es $\frac{4}{3}$), so muß der Werth eines jeden einzelnen Theiles in Beziehung auf das Ganze gerade um so viel verlieren, als ihrer mehr vorhanden sind. Wächst das Ganze um $\frac{1}{3}$, so besteht es nicht mehr aus 3, sondern aus $\frac{4}{3}$; wächst es um $\frac{1}{4}$, so besteht es nicht mehr aus 4, sondern aus $\frac{5}{4}$; wächst es um den fünften Theil, so hat es jetzt $\frac{6}{5}$. In dem ersten Falle muß dem Ganzen dieser Regel zu Folge $\frac{1}{4}$, im zweiten $\frac{1}{5}$, im dritten $\frac{1}{6}$ u. s. f. entzogen werden.

Nach diesem Beispiele würde

$\frac{6}{7} + \frac{1}{3}$ in 6 Ganzen enthalten seyn $7 - \frac{1}{4}$ mal (denn $\frac{6}{7}$ ist in 6 Ganzen 7 mal).

$(\frac{6}{7} + \frac{1}{4})$ in 6 Ganzen $7 - \frac{1}{5} \times = 5\frac{3}{5} \times$.

$(\frac{6}{7} + \frac{1}{5})$ in 6 Ganzen $7 - \frac{1}{6} \times = 5\frac{5}{6} \times$ u. s. f.

Gesetzt es wäre folgende Proportion gegeben:

$$(\tfrac{7}{8} + \tfrac{1}{3}) : 7 = 60 : x.$$

Die Auflösung ist hier sehr einfach so: 7 Ganze sind $8 \times \frac{7}{8}$; da aber noch $\frac{1}{3}$ dieser $\frac{7}{8}$ mehr da ist, so ist nach dem Obigen $7 = (8 - \frac{1}{4}) = 6 \times (\frac{7}{8} + \frac{1}{3})$; folglich $6 \times 60 = 360$. Denn wenn $\frac{7}{8}$ als Ganzes angesehen wird, so sind sie auch Inbegriff von $\frac{3}{3}$; kommt nun $\frac{1}{3}$ dazu, so sind es $\frac{4}{3}$ von $\frac{7}{8}$; davon sind die $\frac{7}{8}$ freilich nur $\frac{3}{4}$ (eben weil sie als Ganzes, d. i. als $\frac{3}{3}$, gesetzt sind), folglich können sie auch nicht 8 mal, sondern nur $\frac{3}{4}$ von $8 = 6$ mal in den 7 Ganzen enthalten seyn; eben deswegen kann

auch die 60 nicht mehr 8 mal, sondern nur 6 mal, genommen werden.

Wenden wir dies auf das obige Beispiel an, wo das erste Glied $1\frac{3}{7}$ betrug, so verfährt man ganz auf dieselbe Weise. 6 ist $4\frac{1}{5} \times 1\frac{3}{7}$. Ist $(1\frac{3}{7}) + \frac{1}{3}$ vorhanden, so ist es $\frac{1}{4}$ weniger als $4\frac{1}{5}$tel, d. i. $3\frac{3}{20}$ mal; ist es $(1\frac{3}{7} + \frac{1}{4})$, so ist es $\frac{1}{5}$ weniger als $4\frac{1}{5}$, das sind $3\frac{9}{25}$; folglich ist $6 = 3\frac{9}{25} \times (1\frac{3}{7} + \frac{1}{4})$.

Wenn dies auf eine geometrische Proportion *) angewendet wird, so ist es oft bequemer, die Theile, welche zu viel vorhanden sind, sogleich der letzten Verhältnißzahl abzuziehen. Wenn also das Verhältniß wäre: $(1\frac{3}{7}) + \frac{1}{3} : 6 = 40 : x$, so könnte man so verfahren, als ob 10 Ganze da wären; 10 Ganze sind $7 \times \frac{10}{7}$; folglich sollte man nun erst 7×40 nehmen. Aber es soll ja zuerst $\frac{4}{10}$, und dann noch $\frac{1}{4}$ weniger werden. Da es nun in Ansehung des Produktes völlig gleich ist, ob der Multiplicandus oder der Multiplicator vermindert wird, so kann ich auch, weil es hier bequemer ist, die 40 sogleich erst um $\frac{1}{4}$ mal **) vermindern, und dann den Rest noch um $\frac{4}{10}$ mal; $40 - \frac{1}{4} = 30$; davon noch $\frac{4}{10}$ hinweg genom-

*) Unter einer geometrischen Proportion hat man sich zwei Paar Zahlen von verschiedener Größe, aber gleichen Relationen der Theile, zu denken. So viel aliquote Theile die kleinere Zahl des ersten Gliedes enthält, so viel aliquote Theile muß auch die kleinere Zahl des andern Gliedes von ihrer Größern enthalten. Wenn ich also das Verhältniß angebe: $1 : 2 = 3 : 6$, so ist eine geometrische Proportion vorhanden, weil die Relation der Theile in beiden Gliedern gleich ist; denn 1 ist von 2 eben so viel, als 3 von 6; so wie $1 = \frac{1}{2}$ von 2, so ist $3 = \frac{1}{2}$ von 6.

**) Um $\frac{1}{4}$ mal, weil eben die erste Proportionalzahl $\frac{1}{3}$ mehr war, und folglich in dem Ganzen sonst $\frac{4}{3}$ vorhanden seyn würden; um $\frac{4}{10}$tel mal deswegen, weil nicht 10, sondern nur 6, das sind 4 Ganze, weniger vorhanden sind, als 10.

men, das sind $4 \times 3 = 12$, bleiben 18; 7×18 muß also gleich seyn $3\frac{3}{20} \times 40$, oder der gesuchten vierten Proportionalzahl; $7 \times 18 = 126$; $4 + \frac{3}{20} \times 40 = 126$; das Resultat ist also nach beiden Verfahrungsarten dasselbe.

Dasselbe kann man aber auch erzielen, wenn man erst der gefundenen letzten Proportionalzahl die verlangten Theile entzieht. Es werden also die 40 7 mal genommen, d. i. 280; davon noch $\frac{1}{4}$, bleiben 210. Jetzt noch $\frac{4}{10}$ oder $\frac{2}{5}$, das sind 84, von 210, bleiben 126, das ist die vorige Summe. Man sieht also, daß es völlig gleich ist, ob die Operation an derjenigen Zahl vollbracht werde, welche die gegebene dritte zu der vierten erhöht, das ist hier der Multiplicator 7, oder an der bekannten ersten Proportionalzahl des zweiten Gliedes, das ist hier die 40, oder an der gefundenen vierten Proportionalzahl, diese war hier 280. Da sich das in allen vorkommenden Fällen bewährt, so kann man sich die Regel merken:

Es ist bei geometrischen Verhältnissen völlig gleich, an welcher Zahl die erforderliche Operation vollbracht werde.

Es mögen hier nur noch einige Beispiele statt der Uebungen stehen, die nun jeder Lehrer schon selbst einrichten wird.

Aufgabe.

$(2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4} : 26 = 120 : x.$

I. Erste Art der Auflösung:

[Die aliquoten Theile werden um so viel vermehrt, als es der hinzugekommene Theil, hier $\frac{1}{4}$, erfordert.]

$2\frac{3}{5} = 1\frac{3}{5}$; $\frac{1}{4}$ von $1\frac{3}{5} = 3\frac{1}{4}$; $\frac{13 + 3\frac{1}{4}}{5} = \frac{16\frac{1}{4}}{5}$ ist von $16\frac{1}{4}$ *) $= 5 \times 16\frac{1}{4}$ Ganze; 26 ist $9\frac{3}{4} > 16\frac{1}{4}$;

*) Da hier $\frac{1}{4}$ des Fünftels da ist, und $\frac{1}{4}$ des Ganzen, so versteht es sich von selbst, daß ein Viertel eines Fünftels mit

$16\frac{1}{4} = \frac{65}{4}$; $9\frac{3}{4} = \frac{39}{4}$; also ist $26 = 1\frac{39}{65}$. Da $\frac{39}{65}$ gleich sind $\frac{3}{5}$, so ist es noch kürzer: $1\frac{3}{5} \times 5 \times 16\frac{1}{4}$; $1 + \frac{3}{5} \times 5 = 8$. Es ist demnach $26 = 8 \times \frac{16\frac{1}{4}}{5}$ oder $8 \times (2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4}$; $(2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4} = 120$; folglich ist $26 = 8 \times 120 = 960$. Das ganze Verhältniß ist also:

$$(2\tfrac{3}{5}) + \tfrac{1}{4} : 26 = 120 : 960.$$

II. Zweite Art der Auflösung:

[Der aliquote, hier der vierte, Theil wird sogleich der zweiten Verhältnißzahl des ersten Gliedes, das ist hier der 26, entzogen.]

$(2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4} : 26$ ist gleich $2\frac{3}{5} : 26 - \frac{1}{5}$ (nach S. 170.); $26 - \frac{1}{5} = 20\frac{4}{5}$; $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$; 13 Ganze sind $5 \times \frac{13}{5}$; $20\frac{4}{5} = \frac{7\frac{4}{5}}{13}$ mehr als 13 Ganze; folglich $\frac{7\frac{4}{5}}{13} \times 5 = \frac{35 + \frac{20}{5}}{13}$; $\frac{\frac{20}{5}}{13} = \frac{4}{13}$; $\frac{35 + 4}{13} = \frac{39}{13}$ oder 3 Ganze; $3 + 5 = 8$; also ist auch $26 = 8 \times (2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4}$ ꝛc.

III. Dritte Art der Auflösung:

[Der aliquote Theil wird der ersten Zahl des zweiten Gliedes, d. i. hier der 120, entzogen.]

$(2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4} : 26 = 120 : x$ ist gleich dem Verhältnisse $(2\frac{3}{5}) : 26 = (120) - \frac{1}{5} : x$; denn $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$; $13 = 5 \times \frac{13}{5}$; $26 = 2 \times 13$; folglich $2 \times 5 = 10 \times \frac{13}{5}$. Da $120 - \frac{1}{5} = 96$, so muß die unbekannte Zahl $10 \times 96 = 960$ seyn; also auch hier dieselbe Zahl.

dem Viertel eines Ganzen in eben dem Verhältnisse stehen müsse, als dies Fünftel mit dem Ganzen selbst. $1 = \frac{1}{5}$ von 5; $1\frac{1}{4} = \frac{1}{5}$ von $6\frac{1}{4}$ (d. i. $5 \times 5 = \frac{25}{4}$); $\frac{1\frac{1}{4}}{5}$ ist daher auch $\frac{1}{5}$ völlig gleich $1\frac{1}{4}$ Ganzen; denn es bleibt ja immer dieselbe Beziehung der Theile. Man kann diese Wahrheit auch intuitiv so darthun: $1\frac{1}{4} = \frac{5}{\frac{4}{5}}$ oder $\frac{5}{\frac{20}{5}}$; $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $\frac{1}{4}$ hat $\frac{5}{20}$; $\frac{5}{4} = 5 \times 5 = \frac{25}{20}$; $\frac{5}{20}$ sind von $\frac{25}{20}$ $\frac{5}{5}$, d. i. $\frac{1}{5}$.

IV. Vierte Art:

[Derselbe aliquote Theil wird der anfangs freilich noch unbekannten durch x bezeichneten zweiten Zahl des zweiten Gliedes entzogen]

$(2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4} : 26 = 120 : x$ ist gleich dem Verhältnisse: $(2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4} : 26 = 120 : (x - \frac{1}{5})$; $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5} : \frac{26}{5} = 10 \times \frac{13}{5}$; $\frac{13}{5} = 120$; folglich ist $26 = 10 \times 120 = 1200$. Die letzte Zahl soll um $\frac{1}{5}$ vermindert werden; $\frac{1}{5}$ von $1200 = 240$; $1200 - 240 = 960$.

V. Fünfte Art:

[Der aliquote Theil wird dem Exponenten *) entzogen.]

$(2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4} : 26 = 120 : x$ ist gleich dem Verhältnisse: $(2\frac{3}{5}) : 26 - \frac{1}{5}$ des Exponenten; $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$; $26 = 10 \times \frac{13}{5}$; folglich ist $26 = 10 - \frac{1}{5} = 8 \times (2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4}$. Da nun $26 = 8 \times (2\frac{3}{5}) + \frac{1}{4}$, so muß auch die gesuchte unbekannte Zahl $8 \times 120 = 960$ betragen.

Aufgaben.

1) $(2\frac{4}{7}) + \frac{1}{2} : 30 = 100 : x$.

Aufl. $2\frac{4}{7} = \frac{18}{7}$; diese noch $\frac{1}{2}$ mal genommen: $\frac{1}{2}$ von $\frac{18}{7} = \frac{9}{7}$; $\frac{18+9}{7} = \frac{27}{7}$; 27 Ganze sind $7 \times \frac{27}{7}$; 30 sind $\frac{3}{27}$ mehr als $\frac{27}{7}$; folglich auch $\frac{3}{27}$ oder $\frac{1}{9}$ mehr als $7 \times \frac{27}{7}$; $\frac{1}{9}$ von $7 = \frac{7}{9}$; folglich ist $30 = 7\frac{7}{9} \times (2\frac{4}{7}) + \frac{1}{2}$. Da $(2\frac{4}{7}) + \frac{1}{2}$ gleich ist der Summe 100, so ist die vierte unbekannte Proportionalzahl

*) Der Exponent ist diejenige Zahl, welche das eigentliche Verhältniß zweier gegebenen Zahlen bestimmt, und den Grund ihrer Gleichheit in sich faßt. In dem eben vorgekommenen Falle ist die 10 der Exponent; denn die $\frac{13}{5}$ werden durch 25 10 mal wiederholt, und eben so die erste bekannte Zahl des zweiten Gliedes.

$7\frac{7}{9} \times 100$; $7 \times 100 = 700$; $\frac{7}{9} \times 100$ ist gleich $7 \times 10 + 1\frac{1}{9} = 77\frac{7}{9}$; $700 + 77\frac{7}{9} = 777\frac{7}{9}$. Das ganze Verhältniß ist also $(2\frac{4}{7}) + \frac{1}{2} : 30 = 100 : 777\frac{7}{9}$.

2) $(5\frac{2}{7}) + \frac{2}{5} : 30 = 90 : x$.

[Das veränderte Verhältniß ist nach III. *)].

Aufl. $5\frac{2}{7} : 30 = 90 - \frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3} = 60 : x$; $5\frac{2}{7} = \frac{37}{7}$; 30 Ganze sind $7 \times \frac{30}{7}$; folglich $\frac{7}{37}$ weniger als $\frac{37}{7}$; $\frac{7}{37}$ von 7 sind $7 \times 7 = \frac{42}{37}$, das sind $1\frac{12}{37}$; dies weniger als 7, bleiben $5\frac{25}{37}$. Da $5\frac{2}{7}$ gleich ist 60, so müssen 30 gleich seyn $5\frac{25}{37} \times 60$; $5 \times 6 = 30$; $\frac{7}{37} = 7 \times 6 = \frac{42}{37}$ oder $1\frac{5}{37}$; $\frac{21}{37}$ sind $3 \times 1 + \frac{5}{37} = 3 + \frac{15}{37}$ bis $\frac{25}{37}$ bleiben noch $\frac{4}{37}$ übrig; diese müssen nun ebenfalls von 6 genommen werden; $4 \times 6 = \frac{24}{37}$. Nun sind $3 + \frac{15 + 24}{37} = 4\frac{2}{37}$. Da nun 60 da sind, so sind die 4 nicht Einer, sondern $40 + \frac{2}{37}$ Zig oder $\frac{20}{37}$; diese zu $5 \times 60 = 300$ geben $340\frac{20}{37}$. Das ganze Verhältniß ist also: $(5\frac{2}{7}) + \frac{2}{5} : 30 = 90 : 340\frac{20}{37}$.

[Es konnten auch die $\frac{7}{37}$ irgend einer Zahl des zweiten Gliedes entzogen werden, nachdem man die 60 erst sieben mal genommen hatte. Hier war es am bequemsten, sie von dem letzten Gliede abzuziehen, weil da gerade eine Zahl heraus kommt, welche sich der 37 nähert. Das Verfahren war dann so: $7 \times 60 = 420$. Da nun nach der Forderung $\frac{7}{37}$ weniger seyn sollen, so sucht man zuerst $\frac{1}{37}$ von 42, d. i. $1\frac{5}{37}$; $\frac{7}{37}$ ist also $7 \times 1 + 5 = 7\frac{35}{37}$ oder $\frac{2}{37}$ von 1 weniger als 8. Von 420 werden dies seyn $\frac{2}{37}$ von Zig, das sind $2 \times 10 = \frac{20}{37}$ weniger als 80 bleiben $79\frac{17}{37}$; diese abgezogen von $420 = 340\frac{20}{37}$.]

*) Die dritte Art der Auflösung ist deswegen hier gewählt, weil die erste Zahl des zweiten Gliedes, also hier 90, so beschaffen ist, daß sich mit sehr geringer Mühe $\frac{1}{3}$ abziehen läßt. Man muß sich sogleich darnach umsehen, auf welche Weise man am kürzesten zum Ziele gelange.

3) $(5\frac{2}{3}) + \frac{5}{6} : 70 = 130 : x.$
$(5\frac{2}{3}) + \frac{5}{6} : 70 = 5\frac{2}{3} : (70) - \frac{5}{7}$ (Siehe II. *).

Aufl. $5\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$; $70 - \frac{5}{7} = 20$; $20 = 3 + \frac{3}{17} \times \frac{17}{3}$.
Da $\frac{17}{3} = 130$, so muß die unbekannte Zahl seyn $3 + \frac{3}{17} \times 130 = (390) + \frac{3}{17}$; $\frac{1}{17}$ von $39 = 2\frac{5}{17}$; $\frac{3}{17} = 3 \times 2 + \frac{5}{17} = 6\frac{15}{17}$; $6\frac{15}{17}$ von 39 sind $60\frac{15}{17}$ Zig von 390; $\frac{15}{17}$ Zig sind $\frac{2}{17}$ weniger als ein Zig, oder $\frac{2}{17}$ von 10, das sind $\frac{20}{17}$ oder $1\frac{3}{17}$; $1\frac{3}{17} > 10 = 8 + \frac{14}{17}$; $6 + 8\frac{14}{17}$ zu $390 = 458\frac{14}{17}$. Das vollständige Verhältniß ist also: $(5\frac{2}{3}) + \frac{5}{6} : 70 = 130 : 458\frac{14}{17}$.

4) $(7\frac{3}{5}) + \frac{4}{7} : 76 = 80.$
$(7\frac{3}{5}) + \frac{4}{7} : 76 = 80$ ist nach V. **) gleich dem Verhältnisse $7\frac{3}{5} : 76 - \frac{4}{8}$ oder $\frac{1}{2}$ des Exponenten.

Auflöſ. $7\frac{3}{5} = \frac{38}{5}$; 38 Ganze sind $5 \times \frac{38}{5}$; $76 = 2 \times 38$; folglich auch $2 \times 5 = 10 \times \frac{38}{5}$; 76 Ganze ist $10 - \frac{4}{8} \times 7\frac{3}{5}$; $10 - \frac{4}{8} = 5$; folglich sind 76 $5 \times 7\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$. Da $7\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = 80$, so ist die unbekannte Zahl $5 \times 80 = 400$. Die Proportion ist also: $(7\frac{3}{5}) + \frac{4}{7} : 76 = 80 = 400$.

5) $(9\frac{5}{6}) + \frac{5}{8} : 60 = 150 : x$ ist nach IV. †) gleich dem Verhältnisse: $9\frac{5}{6} : 60 = 150 : x - \frac{5}{9}$.

*) Die zweite Art der Auflösung wurde deswegen gebraucht, weil hier die zweite Zahl des ersten Gliedes so beschaffen ist, daß sich die aliquoten Theile, das sind hier $\frac{5}{7}$ von 70, ohne Bruch abziehen lassen, und dadurch auch zugleich der Vortheil entstand, daß die Zahl der Ganzen, also der 20, der Anzahl von Theilen näher gebracht wurde.

**) Diese Art der Auflösung ist deswegen gewählt, weil der Exponent hier eine gerade Zahl ist, und sich ohne Bruch findet. Wenn dies der Fall ist, so ist sie die allerkürzeste und leichteste zugleich.

†) Diese Art der Auflösung ist deswegen gewählt, weil durch die erste Operation sich die Zahl 900 ergiebt, wovon sich $\frac{5}{9}$ sehr leicht abziehen lassen.

Aufl. $9\frac{5}{6} = \frac{59}{6}$; $59 = 6 \times \frac{59}{6}$. Da $9\frac{5}{6} = 150$, so ist $60 = 6\frac{6}{59} \times 150$; $6 \times 150 = 900 + \frac{900}{59} - \frac{5}{9}$; $\frac{5}{9}$ von 900 abgezogen, bleiben $400 + \frac{400}{59}$, das sind $406\frac{46}{59}$. Die vollständige Proportion ist also: $(9\frac{5}{6}) - \frac{5}{8} : 60 = 150 : 406\frac{46}{59}$.

So wie eine gegebene Zahl durch neu hinzugekommene Theile vermehrt werden kann, so läßt sie sich auch eben so wohl vermindern. Es leuchtet ein, daß dann das Verfahren überall umgekehrt seyn wird. Denn durch die Verminderung der ersten Zahl entfernt sich dieselbe von der zweiten, so, daß die letztere dadurch, in Beziehung auf die erstere, eine höhere wird, und natürlich die erstere mehrfach enthalten muß. Es ist daher völlig gleich, ob die erstere Zahl vermindert, oder ob die letztere in eben dem Grade vermehrt wird, da es hier nur auf das gegenseitige Verhältniß ankommt. Aber so wie es oben schon deutlich wurde, daß in diesem Falle nicht derselbe aliquote Theil gerade, sondern nur einer von gleichem Werthe, der letzten Zahl entzogen werden durfte, so wird dasselbe auch hier der Fall seyn. Der vermindernde Theil des ersten Gliedes macht, daß dasselbe um einen solchen Theil kleiner wird. Es kann daher auch nicht mehr eine gleiche Anzahl von Theilen vorhanden seyn. Wenn einer Summe z. B. der dritte Theil genommen wird, so können nicht mehr drei, sondern nur zwei solcher Theile, da seyn. Es kann daher auch nirgends dann von Dritteln, sondern überall nur von Halben, die Rede seyn. Wenn nun die erste Verhältnißzahl eines Gliedes vermindern, und die zweite vermehren, ganz einerlei ist, so wird, wenn man dies anwenden will, in diesem Falle die zweite Zahl nicht um ein Drittel, sondern um ein Halb, vermehrt werden müssen, wenn

man das gleiche Verhältniß erhalten will, und die allgemeine Regel ist:

Wenn in einer geometrischen Proportion die erste Zahl eines Gliedes um einen aliquoten Theil vermindert ist, so kann man bei der Vergleichung das zweite Glied sogleich vermehren. Da aber die Verminderung selbst bewirkt, daß nun ein aliquoter Theil weniger zu wiederholen ist, so muß, wenn das Verhältniß bleiben soll, die zweite Zahl um einen oder mehrere solcher Theile, als noch zurück geblieben sind, vermehrt werden.

Gesetzt es wäre das Verhältniß $3 - \frac{1}{3} : 8$ da, so könnte man das Drittel der erstern Zahl sogleich nehmen. Natürlich bleiben 2 zurück, diese sind in 8 vier mal enthalten. Wollte ich dieselbe Operation an der zweiten Zahl vollbringen, so würde man diese $\frac{1}{2}$ vermehren müssen, und dann wäre das Verhältniß: $3 : (8 + \frac{1}{2}) = 8 + \frac{1}{2}$ von $8 = 8 + 4 = 12$. Nun ist 12 eben so wohl 4×3, als $8 = 4 \times 2$. Es ändert sich also hier nichts, sondern es ist vielmehr nur eine Versetzung oder Veränderung der Stellungen. Je weniger Theile der ersten Zahl zurück bleiben, desto größer werden diejenigen Theile seyn, welche die zweite Zahl vermehren. Um das Verfahren einfach und anschaulich darzustellen, so möge in folgender Reihe die erste Verhältnißzahl durch a, die andere durch b, bezeichnet werden. Jetzt denke man sich, daß b allezeit in eben dem Grade vermehrt werden soll, als sich a vermindert.

Wenn a — $\frac{1}{3}$, so muß b zu b$\frac{1}{2}$ erhoben werden; also das Verhältniß a — $\frac{1}{3}$ > b ist gleich dem Verhältnisse a : b + $\frac{1}{2}$.

a — $\frac{1}{4}$: b = a : b + $\frac{1}{3}$.
a — $\frac{1}{5}$: b = a : b + $\frac{1}{4}$.
a — $\frac{2}{5}$: b = a : b + $\frac{2}{3}$ *).
a — $\frac{3}{5}$: b = a : b + $\frac{3}{2}$ oder 1$\frac{1}{2}$ × b.
a — $\frac{1}{8}$: b = a : b + $\frac{1}{7}$.
a — $\frac{2}{8}$: b = a : b + $\frac{2}{6}$, d. i. $\frac{1}{3}$.
a — $\frac{3}{8}$: b = a : b + $\frac{3}{5}$.
a — $\frac{5}{8}$: b = a : b + $\frac{5}{3}$ oder 1$\frac{2}{3}$ × b.

Es ist natürlich, daß es auch hier gleichgültig ist, an welcher Zahl die Operation vollbracht werde; das Produkt ändert sich deshalb um nichts; nur muß man die aliquoten Theile genau berücksichtigen, weil sie den Maßstab der Theile angeben, um wie viel das zweite Glied wächst, wenn das erste steigt.

Beispiele nach allen Arten von Auflösungen.

Aufgabe:

9 — $\frac{1}{3}$: 36 = 80 : x.

a) 9 — $\frac{1}{3}$ = 6; 36 = 6 × 6. Da nun (9) — $\frac{1}{3}$ = 80, so muß 36 = 6 × 80 = 480; folglich 9 — $\frac{1}{3}$: 36 = 80 : 480.

b) 9 — $\frac{1}{3}$: 36 ist gleich dem Verhältnisse: 9 : 36 + $\frac{1}{2}$; (36) + $\frac{1}{2}$ = 36 + 18 = 54; 54 = 6 × 9; folglich ist auch 36 gleich

*) Denn wenn von der ersten Zahl $\frac{2}{5}$ genommen werden, so bleiben noch $\frac{3}{5}$ zurück, und die zurückbleibenden Theile bestimmen die Größe derjenigen Theile, welche die zweite Zahl vermehren.

$6 \times (9) - \frac{1}{3}$. Da nun $9 - \frac{1}{3} = 80$, so ist $36 = 6 \times 80 = 480$.

c) $9 - \frac{1}{3} : 36 = 80 : x$ ist gleich dem Verhältnisse $9 : 36 + \frac{1}{2}$ des Exponenten; $36 = 4 \times 9$. Da aber $9 - \frac{1}{3}$ da ist, so ist der Exponent $4 + \frac{1}{2} \times 4 = 2 = 4 + 2 = 6$; folglich ist $36 = 6 \times 9 - \frac{1}{3}$. Da nun $9 - \frac{1}{3} = 80$, so ist $36 = 6 \times 80 = 480$.

d) $9 - \frac{1}{3} : 36 = 80 : x$ ist gleich dem Verhältnisse $9 : 36 = (80) + \frac{1}{2} : x$; $36 = 4 \times 9$. Da $9 = 80 + \frac{1}{2}$, d. i. $80 + 40 = 120$, so ist $36\ 4 \times 120 = 480$.

e) $(9) - \frac{1}{3} : 36 = 80 : x$ ist gleich dem Verhältnisse $9 : 36 = 80 : x + \frac{1}{2}$; $36 = 4 \times 9$. Da $9 = 80$, so ist $36 = 4 \times 80 = 320 + \frac{1}{2} \times 320 = 160$; $320 + 160 = 480$.

Auch kann man sogleich den Exponenten des zweiten Gliedes nur vermehren, und alles Uebrige lassen. Es ist nämlich $(9) - \frac{1}{3} : 36 = 80 : x$ gleich der Proportion $9 : 36 = 80 : 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times 80 = 480$. Das ist aber völlig mit c dasselbe Verfahren.

In dem gegebenen Beispiele war freilich die erste Verfahrungsart die nächste und zugleich einfachste; dies ist aber nicht oft der Fall. Denn sobald sich die Zahl nicht ohne eine große Vermehrung in gleiche Theile löset, so ist ein anderes Verfahren viel weniger schwierig; besonders wenn die Exponenten aus gleichen Zahlen bestehen. Man muß natürlich die Verhältnißzahlen selbst genau ansehen und beurtheilen, um dadurch in den Stand gesetzt zu werden, den kürzesten Weg der Auflösung zu finden. Ist die erste Zahl so beschaffen, daß die Verminderung ohne Brüche, oder auf jeden Fall so geschehen kann, daß sie sich ohne eine Zertheilung der gegebenen zweiten Verhältnißzahl

leicht

leicht auflösen, und mithin der Exponent leicht gefunden werden kann, so wähle man die erste und natürlichste Art der Auflösung. Wenn dies aber nicht der Fall ist, so wird man sich deswegen lieber an jede andere Auflösung halten, weil die erste Proportionalzahl um so leichter sich wiederholen läßt, je weniger sie zusammengesetzt ist. Eine größere Zahl, welche gebrochen ist, wiederholt allezeit eine ganze kleinere leichter, als wenn die kleinere Zahl gebrochen ist. Denn die größere Zahl muß alsdann allezeit in so viel aliquote Theile aufgelöset werden, als die kleinere selbst hat. Nun erschweren oder vermehren sich dadurch wenigstens die Operationen selbst, und machen eben deswegen auch die Uebersicht schwieriger. Einige Beispiele mögen auch hier dem Ganzen mehr Licht geben.

$(2\frac{4}{7}) - \frac{1}{4} : 30 = 70 : x.$

Da die zweite Proportionalzahl hier 30 ist, und diese sich gerade am leichtesten $\frac{1}{3}$ vermehren läßt, so wird man sich am passendsten dieser Auflösung bedienen. Man setze also das Verhältniß so an: $2\frac{4}{7} - \frac{1}{4} : 30$ ist gleich der Proportion: $2\frac{4}{7} : 30 + \frac{1}{3} \times 30 = 30 + 10$ oder 40. Die Auflösung selbst ist nun so: $2\frac{4}{7} = \frac{18}{7}$; 18 Ganze sind $7 \times \frac{18}{7}$; 40 sind $2 + \frac{4}{18}$ oder $\frac{2}{9} \times \frac{18}{7}$; folglich $2\frac{2}{9} \times 7 = 14 + \frac{14}{9}$, d. s. $15\frac{5}{9} \times 70$; $15\frac{5}{9} \times 7 = 105 + \frac{35}{9}$, d. s. $3\frac{8}{9}$; $105 + 3\frac{8}{9} = 108\frac{8}{9}$. Da es 5×70 waren, so sind es $1088\frac{8}{9}$. Die vollständige Proportion ist: $(2\frac{4}{7}) - \frac{1}{4} : 30 = 70 : 1088\frac{8}{9}$.

Ein anderes Beispiel:

$(8\frac{4}{9}) - \frac{2}{5} : 40 = 100 : x.$

$8\frac{4}{9} = \frac{76}{9}$. Wären anstatt der 40 Ganze noch ein mal so viel, also 80 Ganze da, so würde man so verfahren: 76 Ganze sind $9 \times \frac{76}{9}$; 80 ist $\frac{4}{76}$, das ist $\frac{1}{19}$ mehr als 76; folglich auch $\frac{1}{19}$

mehr als 9 × $\frac{26}{9}$, das sind $9\frac{9}{19}$ mal $\frac{26}{9}$. Da aber die zweite Zahl um ein mal mehr genommen ist, so daß 40 nur $\frac{1}{2}$ der eigentlichen Zahl ist, so muß auch nur der halbe Exponent $\frac{1}{2}$ $9\frac{9}{19}$ genommen werden, das ist $4\frac{1}{2} + \frac{9}{38}$. Da $\frac{1}{2} = \frac{19}{38}$ beträgt, so sind 19 + 9 = $\frac{28}{38}$, das sind aber $\frac{14}{19}$; folglich ist 40 = $4\frac{14}{19} \times 8\frac{4}{9}$. Da $8\frac{4}{9}$ gleich ist der Summe 100, so muß 40 = $4\frac{14}{19} \times 100$; $4 \times 100 = 400$; $\frac{1}{19} \times 100 = 5\frac{5}{19}$; $\frac{14}{19} = 14 \times 5\frac{5}{19}$, das sind $70 + \frac{70}{19}$; $\frac{70}{19} = 3\frac{13}{19}$; $400 + 70 + 3\frac{13}{19} = 473\frac{13}{19}$. Wären also nicht bei der ersten Zahl $\frac{2}{5}$ weniger, so würde die letzte Proportionalzahl schon gefunden seyn. Da aber diese $\frac{2}{5}$ weniger ist, so ist eine jede andere Zahl noch in dieser Beziehung $\frac{2}{5}$ zu vermehren; also noch $\frac{2}{3}$ von $473\frac{13}{19}$; $\frac{1}{3}$ ist $187\frac{2}{3} + \frac{4}{10}$; $\frac{2}{3}$ ist $315\frac{1}{3} + \frac{8}{10}$; $\frac{1}{3} + \frac{8}{10} = \frac{15}{19}$. Es kommen also zu $473\frac{13}{19}$ noch $315\frac{15}{19}$; daraus ergiebt sich die Summe $789\frac{9}{19}$. Die vollständige Proportion ist also: $(8\frac{4}{9}) - \frac{2}{5} : 40 = 100 : 789\frac{9}{19}$.

Noch einfacher wird die Auflösung, wenn man anstatt den Exponenten zu verkleinern, sogleich die erste Zahl des zweiten Gliedes um die Hälfte vermindert, und nun so verfährt, als ob 80 Ganze vorhanden wären. Denn die letzte Zahl des ersten Gliedes um die Hälfte vermehren, und eine der beiden Zahlen des zweiten Gliedes um eben so viel vermindern, giebt ein gleiches Verhältniß, weil durch die Vermehrung der letzten Zahl im ersten Gliede der Exponent um eben so viel wachsen muß, als die zweite Verhältnißzahl. Nun wiederholt aber der Exponent die gegebene Zahl des zweiten Gliedes um eben so viel mal mehr, als er sich selbst vergrößert hat. Macht man aber dieselbe Zahl wiederum um so viel mal kleiner, als sich der Exponent vergrößert hat, so ist das Resultat oder die letzte Proportionalzahl natürlich

dieſelbe, welche man auch auf die erſte Weiſe gefunden hätte. Da hier die gegebene Zahl 100 beträgt, ſo würde man nur die Hälfte von 50 nehmen, und übrigens ganz auf dieſelbe Weiſe verfahren dürfen, um immer das gleiche Verhältniß zu behalten. Man würde alſo nun $9 \times 100 - \frac{1}{2}$, d. i. $9 \times 50 = 450$. Nach dem Obigen müſſen dieſe noch zwei Drittel wachſen; $\frac{2}{3}$ von 450 ſind 300, das ſind alſo 750. Dieſen muß aber noch $\frac{1}{19}$ *) beigefügt werden; $\frac{1}{19}$ von 75 iſt $\frac{1}{19}$ weniger als 4; von 750 ſind es $\frac{1}{19}$ Zig, oder $\frac{10}{19}$ weniger als 40, das iſt alſo $39\frac{9}{19}$; dieſe zu 750 giebt $789\frac{9}{19}$.

Will man von der letzten Verfahrungsart Gebrauch machen, ſo wird man nicht minder ſicher gehen, wenn man alles ſtehen läßt, und den zu viel genommenen Theil, hier alſo gerade die Hälfte, wieder abzieht. Man hat dann $9\frac{9}{19} \times 100 = 900 + 47\frac{7}{19}$, das iſt $947\frac{7}{19}$; dies noch $\frac{2}{3}$ vermehrt, das iſt $631\frac{1}{3} + 4\frac{2}{3}\frac{1}{19}$; $\frac{1}{3} + 4\frac{2}{3}\frac{1}{19} = \frac{1}{19}$; $947 + 631 + \frac{18}{19} = 1578\frac{18}{19} - \frac{1}{2} = 789\frac{9}{19}$.

Endlich liegt auch noch eine Art der Auflöſung nahe. Man kann nämlich dasjenige, was noch der letzten Proportionalzahl fehlt, auch gleich zuſammen nehmen, und den Exponenten, oder eine der Proportionalzahlen, allein erhöhen. Hier ließ ſich dieſes am beſten mit dem Exponenten

*) So iſt es hier bequemer, als wenn man erſt den neunzehntel Theil zu 50 gethan, und nun noch das Ganze um $\frac{2}{3}$ vermehrt hätte. Uebrigens ergiebt ſich auch dann noch daſſelbe Produkt; denn $\frac{1}{19}$ von 50 iſt $2\frac{12}{19}$, alſo $52\frac{12}{19}$. Dieſen konnten jetzt die $\frac{2}{3}$ gleich beigefügt werden; $\frac{2}{3}$ von $52\frac{12}{19}$ iſt 34; $\frac{2}{3} + \frac{8}{19} = \frac{20\frac{2}{3}}{19}$ oder $1\frac{1\frac{2}{3}}{19}$. Nun ſind aber $52 + 34 + 1 = 87$; $\frac{12 + 1\frac{2}{3}}{19} = \frac{13\frac{2}{3}}{19}$. Dieſe 9 mal genommen, geben $789\frac{9}{19}$.

machen, indem man so räsonnirte: Wären 80 Ganze vorhanden, so würde die Wiederholung $9\frac{9}{19}$ mal geschehen müssen. Da nun die erste Zahl des ersten Gliedes $\frac{2}{5}$ weniger ist, so müssen, da diese nicht vermindert ist, eine jede andere Zahl $\frac{2}{5}$ mehr betragen. Diese $\frac{2}{5}$ konnten hier sogleich dem Exponenten 9 gegeben werden. Auf diese Weise wird er $\frac{2}{5}$ mehr, also $15\frac{15}{19}$. Da aber die zweite Zahl des ersten Gliedes nicht 80, sondern nur die Hälfte davon, also 40, ist, so muß hier entweder der halbe Exponent selbst, oder der ganze Exponent, und dann die Hälfte einer der beiden Proportionalzahlen, genommen werden; also entweder

$$15\tfrac{15}{19} - \tfrac{1}{2} \times 100;$$

oder:

$$15\tfrac{15}{19} \times 100 - \tfrac{1}{2} : x;$$

oder:

$$15\tfrac{15}{19} \times 100 = x - \tfrac{1}{2}.$$

Im ersten Falle wird dann der Exponent seyn $7\frac{1}{2} + 7\frac{1}{19} = 7\frac{17}{19}$, d. i. $\frac{2}{19}$ weniger als 8; folglich $\frac{2}{19}$ von 100 weniger als $8 \times 100 = 800 - 10\frac{10}{19}$, das ist $789\frac{9}{19}$.

Im zweiten Falle ist die erste Proportionalzahl des zweiten Gliedes 50; $15 + \frac{17}{19} \times 50 = 789\frac{9}{19}$.

Im dritten Falle ist die letzte Proportionalzahl $15\frac{15}{19} \times 100 = 1578\frac{18}{19} - \frac{1}{2} = 789\frac{9}{19}$.

Mehrere Beispiele anderer Art werden sich selbst finden. Man muß sich nur hüten, etwas dabei zu übersehen. Wenn in dem vorigen Beispiele die Summe der Ganzen $\frac{1}{19}$ mehr beträgt, als 9 mal die erste Zahl des zweiten Gliedes, so ist dies Neunzehntel allerdings ein aliquoter Theil der 9 oder des Exponenten. Er ist also $\frac{1}{19}$ mehr

als 9, das ist aber $\frac{2}{19}$ von Eins. Die Multiplication der ersten Zahl des zweiten Gliedes muß also $9 + \frac{2}{19}$ mal geschehen. Wenn man aber diesen aliquoten Theil sogleich einer der beiden Proportionalzahlen des zweiten Gliedes ertheilen will, so darf man derselben nur $\frac{1}{19}$ geben, weil dieses dann ohnehin schon durch den Exponenten 9 mal wiederholt wird. Man wird sich daher auch in Acht zu nehmen haben, ihn nicht nach der Multiplication des eben genannten Gliedes der Summe beizufügen, weil dann diese Wiederholung wegfiele. Denn es ist ein großer Unterschied, ob ich $9 \times (100 + \frac{1}{19})$, oder 9×100, und nun nur noch $\frac{1}{19}$ von Hundert nehme. Es leuchtet ein, daß in dem ersten Falle der aliquote Theil um eben so viel mal, als die Summe 100 selbst, wiederholt werde, während er im letztern unwiederholt bleibt. Hingegen liegt es eben so am Tage, daß derselbe Theil von der letzten Proportionalzahl nur ein mal genommen werden dürfe, weil diese nun schon neun mal genommen ist. Nicht minder vorsichtig muß man in Ansehung der Erhöhung einer Zahl ebenfalls durch aliquote Theile seyn. Es ist bei doppelten Verhältnissen gleichgültig, welcher Theil früher, welcher später genommen werde. Aber wohl macht es einen Unterschied, ob überhaupt ein Theil erst nach dem andern, das ist also von einer schon veränderten, oder ob beide von derselben unveränderten Zahl genommen werden. Denn durch ein jedes Hinzufügen eines Theiles wächst die Summe. Wird nun der schon vermehrten Summe noch irgend ein Theil ihrer selbst beigefügt, so muß natürlich der Inhalt oder die Potenz dieses Theiles größer seyn, als die Zahl, der er gehört, selbst gewachsen ist. Hingegen ist es ganz gleichgültig, welcher der beiden verschiedenartigen Theile zuerst, welcher zuletzt der Summe gegeben werde, weil dann die Operation an beiden

auf gleiche Weise vollbracht wird. In dem eben erwähnten Falle konnte also, wenn man an der ersten Proportionalzahl des zweiten Gliedes die Operation vollbringen wollte, die 100 zuerst $\frac{1}{19}$, und dann die daraus entstandene Summe $\frac{2}{3}$ erhöht werden; dies würde dann $100 + 5\frac{5}{19}$; dies um $\frac{2}{3}$ erhöht, giebt $166\frac{2}{3} + 8\frac{1}{3}$; $8\frac{1}{3}_{19} = 175 + 8\frac{1}{3}_{10}$; dies vier und ein halb mal genommen muß dasselbe Produkt geben. Dasselbe würde sich auch ergeben, wenn man $\frac{2}{3}$ von 100 zuerst, und dann noch $\frac{1}{19}$, wiederholte; denn dann würde dies Neunzehntel auch von $166\frac{2}{3}$ genommen werden müssen; dies macht $8 + \frac{14\frac{2}{3}}{19}$. Eine vier und $\frac{1}{2}$ malige Wiederholung muß dieselbe Summe geben: $4\frac{1}{2} \times 166\frac{2}{3} = 750$, und $4\frac{1}{2} \times 8 + \frac{14\frac{2}{3}}{19} = 39\frac{9}{19}$; $750 + 39\frac{9}{19} = 789\frac{9}{19}$. Wollte man hingegen verschiedenartige Theile sogleich zusammenfügen, und nach eben derselben Regel verfahren, so würde man hinwiederum einen Irrthum begehen, weil dann natürlich nicht der Forderung gemäß der schon durch einen Theil vergrößerten, sondern einer und derselben Zahl ein aliquoter Theil zugesellt würde. So ist es ganz verschieden, ob zu 12 gleich $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, also $\frac{7}{12}$, zusammen genommen, oder ob erst der durch einen dieser aliquoten Theile vermehrten Summe noch der andere verliehen werde. Denn $(12 + \frac{7}{12}) = 19$; aber $12 + \frac{1}{3} = 16 + \frac{1}{4} = 20$; oder $(12 + \frac{1}{3}) = 15$, $(15 + \frac{1}{3}) = 20$. Dies ist sehr natürlich; denn es wird ja durch den zweiten aliquoten Theil der erste ebenfalls wiederholt, sobald derselbe schon der Summe zugetheilt ist. Will man daher ja zwei verschiedenartige Theile in einen verwandelt dem Ganzen gleich schenken, so muß man den ersten aliquoten Theil zuvor durch den zweiten wiederholen, und dann erst beide zusammenfügen. In dem gegebenen Beispiele muß also $\frac{1}{3}$ erst durch $\frac{1}{4}$ wiederholt, und dann können beide vereint der

Summe gegeben werden. $\frac{2}{3} = 12\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 12\frac{7}{2}$; $\frac{7+1=8}{12}$; diese zu 12 giebt = 20. Dasselbe angewendet auf das vorhergehende Beispiel, wo $\frac{2}{3}$ und dann noch $12\frac{1}{9}$, oder $12\frac{1}{9}$ und dann noch $\frac{2}{3}$ einer Summe gegeben werden sollte, so würde man die zwei Drittel erst durch $12\frac{1}{9}$, oder $12\frac{1}{9}$ durch $\frac{2}{3}$, wiederholen, und sodann vereint der Proportionalzahl noch beifügen. Das wären also: $\frac{2}{3} + 12\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\frac{1}{10} = 14\frac{1}{10}$. Wenn 100 noch um $14\frac{1}{10}$ vermehrt wird, so entstehen $175\frac{8}{12}$; diese $4 + \frac{1}{2} \times = 789\frac{9}{12}$.

Nicht blos doppelte, sondern auch drei- und mehrfache Verhältnisse sind vorhanden, und nach ebenderselben Regel zu behandeln. Aber freilich sind die Abwechselungen um so zusammengesetzter und mannichfaltiger, je mehrfach die Verhältnißzahlen selbst sind.

Bei mehrfachen Verhältnissen können folgende Veränderungen vorgehen:

1) Es kann die erste Zahl des ersten Gliedes durch Theile ihrer selbst, und die daraus entstandene Zahl kann hinwiederum durch einen dritten Zusatz von Theilen vermehrt werden.

Hier leuchtet ein

a) daß die gegebene erste Zahl sich um eben so viel vergrößert, als die gegebenen Theile sich mehren. Wenn z. B. die erste Zahl 30, und diese zuerst durch $\frac{1}{3}$, und die daraus entstandene neue Zahl wiederum durch $\frac{1}{3}$ vermehrt wird, so wächst die Zahl, $30 + \frac{1}{3} = 40$, und diese wieder durch $\frac{1}{3} = 40 + \frac{1}{3} = 53\frac{1}{3}$. Wäre noch ein Drittel da, so würde dadurch

die Zahl noch zu einer höhern anwachsen, weil dann eine schon erhöhte Zahl hinwiederum durch einen aliquoten Theil ihrer selbst vergrößert wird. Der aliquote dritte Theil müßte von $53\frac{1}{3}$ genommen werden; da dies $17\frac{7}{9}$ beträgt, so würde man dadurch $60\frac{7}{9}$ erhalten.

b) Daß die aliquoten Theile in eben dem Maße an Inhalt gewinnen müssen, je später sie folgen, oder je entfernter sie der gegebenen concreten Zahl sind; weil dann der neue aliquote Theil wiederum ebenfalls mit den andern vergrößert wird. So betrug in dem eben gegebenen Beispiele das erste Drittel nur 10, das zweite schon $13\frac{1}{3}$, das ist also derselbe Theil, und dann noch $\frac{1}{3}$ eben dieses Theiles, und das vierte Drittel ist eine aliquote Wiederholung aller vorhergehenden Theile, und beträgt deshalb $17\frac{7}{9}$ und so fort.

Daraus ergiebt sich hinwiederum

c) daß die aliquoten Theile immer gerade um so viel wachsen, als sie die vorhergehenden wiederholen können. Ist z. B. der erste Theil ein Drittel, und der zweite hinwiederum ein Drittel, so beträgt der Inhalt desselben natürlich den vorhergegangenen dritten Theil, nebst $\frac{1}{3}$ dieses Drittels, also $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3\frac{1}{3}}$, das sind $\frac{4}{9}$. Wäre der erste Theil $\frac{1}{4}$, und der zweite $\frac{1}{3}$, so wäre der Betrag dieses Theils dann $\frac{1}{3} + \frac{1}{3\frac{1}{4}}$, d. i. $\frac{5}{12}$. Gesetzt, daß die daraus entstandene Zahl nun noch um ein Halb vermehrt werden sollte, so würde man zuerst $\frac{1}{2}$ der gegebenen Summe, und dann $\frac{1}{2}$ der $\frac{5}{12}$, das sind $\frac{12+5}{24}$, also $\frac{17}{24}$, nehmen, und diese der ganzen Summe noch beifügen müssen. Wenn wir uns daher eine gegebene concrete Zahl mit

A, und den aliquoten Theil mit b bezeichnen, und nun mehrere Theile hinzufügen, so würde das in folgender Gestalt erscheinen:

$A + b$, dazu $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(A + b)$ oder $A\frac{1}{3} + b\frac{1}{3}$;

denn es ist völlig gleich, ob der neu hinzugekommene Theil gleich die Zahl $A + b$ zusammengenommen, oder ob er jede Einzelne wiederholt. Gesetzt, es käme noch $\frac{1}{4}$ aller dieser Zahlen hinzu, so wäre das Ganze $A\frac{1}{4} + b\frac{1}{4} + (\frac{1}{3})\frac{1}{4}$; das letzte würde von der ganzen Summe $\frac{1}{4\frac{1}{3}} = \frac{1}{12}$ seyn. Anstatt dessen könnte man auch der Zahl $A + b + \frac{1}{3}$ gleich zusammengenommen den letzten aliquoten Theil, das ist also $\frac{1}{4}$, zutheilen, um dasselbe Resultat zu finden.

Nur ein Beispiel mag zur Erläuterung dienen. Es sey die Aufgabe:

$$(6 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) : 90 = 120 : x.$$

Hier kann man auf zweierlei Weise die erste Proportionalzahl behandeln. Man kann jeden Theil einzeln dazu setzen, also $6 + \frac{1}{3} \times 6 = 8$, und $8 + \frac{1}{4} \times 8 = 10$; mithin wäre hier das einfache Verhältniß $10 : 90 = 120 : x$. Man kann aber auch sogleich die erste Proportionalzahl um $\frac{1}{3}$, und die daraus entstandene Zahl hinwiederum $\frac{1}{4}$ vermehren. Da hier die erste Zahl um ein Drittel derselben zu vermehren ist, so kann man auch das erste Drittel mit dem Viertel auf der zweiten Stelle zusammen nehmen. Nach dem Obigen wäre dieses $\frac{1}{4}$ der gegebenen ersten concreten Zahl, und dann noch $\frac{1}{4}$ dieses Drittels. Da nun $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ gleich ist $\frac{1}{12}$teln, und diese hinwiederum $\frac{1}{3}$ betragen, so kann man dasselbe Resultat auch finden, wenn man gleich $\frac{2}{3}$ der gegebenen ersten Proportionalzahl nimmt, und diese ihr selbst beifügt. $6 + \frac{2}{3} \times 6 = 6 + 4$,

und $6 + 4 = 10$. Dieser Weg ist der kürzeste und bequemste zugleich.

2) Es kann die erste Proportionalzahl durch mehrere gleich- oder verschiedenartige Theile ihrer selbst in einer fortlaufenden Reihe vermindert werden.

Hier leuchtet ein

a) daß die gegebene erste Proportionalzahl sich um eben so viel verkleinert, als die aliquoten Theile sich anhäufen. Wenn die erste Zahl 30, und der erste aliquote Theil $\frac{1}{3}$, der zweite $\frac{1}{4}$ wäre, so würde man zuerst $30 - \frac{1}{3} = 20$, und $20 - \frac{1}{4} = 15$, erhalten.

b) Daß die aliquoten Theile um eben so viel mehr an Inhalt verlieren müssen, je weiter sie sich von der gegebenen ersten Proportionalzahl entfernen; weil mit einem jeden aliquoten Theile die gegebene Zahl verkleinert wird, und der Inhalt der Theile abhängig ist von der Größe der gegebenen concreten Zahl. Wenn z. B. die erste Proportionalzahl 30 ist, so ist der dritte Theil auf der ersten Stelle $\frac{1}{3}$ von 30, das ist 10; $30 - 10 = 20$. Auf der zweiten Stelle wäre das Drittel nur $\frac{1}{3}$ der 20, das ist $6\frac{2}{3}$; dies weniger als $20 = 13\frac{1}{3}$ u. s. f.

c) Daß der später stehende aliquote Theil allezeit dieselbe aliquote Verminderung der gegebenen concreten Zahl, und zugleich aller frühern aliquoten Theile in sich fassen müsse. Der aliquote Theil auf der zweiten Stelle beträgt mithin nicht so viel, als auf der ersten, denn es

ist ja dem Ganzen schon $\frac{1}{3}$ entzogen; es bleiben daher nur noch $\frac{2}{3}$ übrig. Das Drittel auf der zweiten Stelle ist nun $\frac{1}{3}$ der noch übrigen zwei Drittel; $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$ ist aber $\frac{2}{9}$; diese $\frac{2}{9}$ enthalten also den Werth des Drittels auf der zweiten Stelle. Dies wird sich sogleich durch ein Beispiel bewähren: $30 - \frac{1}{3} = 20$; $20 - \frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$. Dieselbe Zahl wird sich ergeben, wenn man nach dem Obigen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{9}$, das sind $\frac{5}{9}$, dem Ganzen entzieht; denn $\frac{5}{9}$ von $\frac{9}{9}$ bleiben $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{9}$ von $30 = 3\frac{1}{3}$; $\frac{4}{9} = 4 \times 3\frac{1}{3} = 12\frac{4}{3}$, das sind $13\frac{1}{3}$. Auf der dritten Stelle würde $\frac{1}{3}$, wenn lauter Drittel vorhergegangen wären, $\frac{1}{3}$ von den übrigen $\frac{4}{9}$ seyn; $\frac{1}{3}$ von $\frac{4}{9}$ sind $\frac{4}{27}$ oder $\frac{4}{27}$; mithin wären die Abstufungen so: $\frac{1}{3}$ auf der ersten Stelle, $\frac{2}{9}$ auf der zweiten, und $\frac{4}{27}$ auf der dritten. Würden diese unter eine Benennung gebracht, so wäre der erste aliquote Theil $\frac{9}{27}$, der zweite $\frac{6}{27}$, der dritte $\frac{4}{27}$, das sind $\frac{19}{27}$. Es bleiben auf diese Weise noch $\frac{8}{27}$ als Rest zurück. Wollte man die Regel dieses Verfahrens mechanisch machen, so würde man sie so angeben können: Will man den Rest wissen, welcher nach dem Abzug gleichartiger Theile entsteht, so multiplicire man den Zähler mit 2, den Nenner mit 3. Wenn daher bei dem Abzuge des ersten Drittels $\frac{2}{3}$ bleibt, so muß man den Zähler, das ist 2, durch 2 multipliciren, das sind 4; den Nenner durch 3, so entsteht 9; daraus ergiebt sich $\frac{4}{9}$ als Rest. Will man den dritten Rest wissen, so würde man $2 \times 4 = 8$, und $3 \times 9 = 27$, zusammen also $\frac{8}{27}$, als Rest erhalten u. s. f.

Wenn sich aber verschiedenartige Theile vorfinden, so ist auch hier kein Unterschied des Verfahrens; sondern man nimmt dann den aliquoten Theil, welcher sich auf der ersten Stelle

befindet, dem Ganzen weg, betrachtet dann den Theil auf der zweiten Stelle als Theil desjenigen Restes, welcher durch diesen Abzug entstanden ist. Ist der erste vermindernde Theil $\frac{1}{4}$, so bleibt noch $\frac{3}{4}$ als Rest. Der zweite aliquote vermindernde Theil ist daher ein Theil der zurückgebliebenen $\frac{3}{4}$. Wäre der zweite vermindernde Theil $\frac{1}{3}$, so blieben von den $\frac{3}{4}$ nur noch $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ übrig.

Auch hier möge ein Beispiel zur Verdeutlichung dienen:

$$40 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} : 80 = 60 : x.$$

Hier kann die Auflösung, wie oben, auf verschiedene Weise geschehen:

α) entweder die aliquoten Theile werden sogleich der ersten Proportionalzahl entzogen: $40 - \frac{1}{4} = 30$; $30 - \frac{1}{3} = 20$ (oder $- \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$) $= \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ von $40 = 20$; $80 = 4 \times 20$; folglich ist auch die unbekannte Zahl $4 \times 60 = 240$.

β) Die zweite Proportionalzahl des ersten Gliedes wird um so viel vermehrt, als die erste sich vermindert. Da hier die Verminderung bis zur Hälfte geschieht, so wird, wenn man die aliquoten Theile von der ersten Proportionalzahl nicht abziehen will, die zweite Proportionalzahl gerade verdoppelt werden müssen; also: $40 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} : 80 = 40 : 2 \times 80$; $2 \times 80 = 4 \times 40$; folglich muß auch die unbekannte Zahl seyn: $4 \times 60 = 240$.

γ) Die Operation wird an den Exponenten vollbracht. Wären die vermindernden Theile nicht da, sondern das reine Verhältniß 40 : 80, so wäre der Exponent 2; da hier aber durch die vermindernden Theile die erste Proportionalzahl sich bis zur Hälfte entfernt, so muß nun auch

der erste Exponent nur die Hälfte desjenigen seyn, welcher nach dem Hinzufügen dieser vermindernden Theile Statt findet. Wenn 2 die Hälfte des Exponenten ist, so ist der wirkliche Exponent 4. Es ist daher $40 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} : 80 = 60$ gleich dem Verhältnisse

$$40 : 80 = 60 : 2 \times 2 = 4 \times 60 = 240.$$

δ) Statt der Verminderung der ersten Proportionalzahl kann auch eine gleich große Vermehrung der zweiten Zahl des zweiten Gliedes Statt finden. Dann ist $40 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} : 80 = 60 : x$ gleich dem Verhältnisse $40 : 80 = 60 : 2 \times x$. Da $80 = 2 \times 40$, so muß x seyn $2 \times 60 = 120$; dies x noch 2 mal, d. i. $2 \times 120 = 240$.

Die Abnahme der Theile und der Werth derselben ist in folgender Reihenfolge beispielsweise durchgeführt.

Denke man sich $\frac{1}{5}$ als den ersten vermindernden Theil, und auf der zweiten Stelle wiederum $\frac{1}{5}$, so ist der ganze Betrag $1\frac{1}{5}$, das sind $\frac{9}{25}$ u. s. f.

$- \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{9}{25}$.

$- \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{25}$ (denn $- \frac{1}{5}$ bleibt $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{5}$ von $\frac{4}{5} = 2 \times 4 = \frac{8}{25}$; $\frac{1}{5} + \frac{8}{25} = \frac{13}{25}$).

$- \frac{2}{5} - \frac{1}{5}$ sind ebenfalls $\frac{13}{25}$ (denn $- \frac{2}{5}$ bleiben $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$; $\frac{2}{5} + \frac{3}{25} = \frac{13}{25}$).

[Es kommt hier nichts darauf an, welcher der aliquoten Theile früher, welcher später gesetzt werde.]

$- \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{17}{25}$, Rest $\frac{8}{25}$; oder

$- \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{17}{25}$, Rest $\frac{8}{25}$.

$- \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = \frac{21}{25}$, Rest $\frac{4}{25}$.

— $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{4}$ = $\frac{2}{5}$, Rest $\frac{3}{5}$; oder
— $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{5}$ = $\frac{8}{20}$ oder $\frac{2}{5}$, Rest $\frac{12}{20}$ oder $\frac{3}{5}$.
— $\frac{2}{5}$ — $\frac{1}{4}$ = $\frac{11}{20}$, Rest $\frac{9}{20}$ (denn — $\frac{2}{5}$ bleibt $\frac{3}{5}$;
$\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{5}$ = $\frac{3}{4}$ oder $\frac{3}{20}$; $\frac{2}{5}$ sind $2 \times 4 = \frac{8}{20}$;
$\frac{3+8}{20} = \frac{11}{20}$; $\frac{11}{20}$ von $\frac{29}{20}$ bleiben $\frac{9}{20}$).
— $\frac{3}{5}$ — $\frac{1}{4}$ = $\frac{14}{20}$ oder $\frac{7}{10}$, Rest $\frac{6}{20}$ oder $\frac{3}{10}$
(denn — $\frac{3}{5}$ bleiben $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{5} = \frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$;
$\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$; $\frac{3\frac{1}{2}}{5}$ sind folglich $3\frac{1}{2} \times \frac{4}{20} = \frac{14}{20}$).

Nach diesem Beispiele müssen sich alle Uebungen richten. Es ist leicht einzusehen, daß hier immer dieselbe Regel gilt, und daß nichts auf die Beschaffenheit der Theile ankommt.

3) Endlich kann die erste Proportionalzahl durch einen oder mehrere gleich- oder verschiedenartige Theile ihrer selbst vermehrt, und durch einen oder mehrere andere derselben vermindert werden.

Hier leuchtet ein

a) daß die gegebenen vermehrenden oder vermindernden Theile sich selbst nur in so weit entgegengesetzt sind, als sie sich dem Werthe, nicht der absoluten Größe nach, einander gleich sind. So hebt sich $+\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ an sich völlig auf; sobald aber beide einen Werth haben, der von einer gegebenen concreten Zahl abhängt, so sind diese Theile zwar in Ansehung der Form, aber nicht des Werthes, einander entgegengesetzt. So sind z. B. $(30 + \frac{1}{3}) = 40$. Kommt nun $- \frac{1}{3}$ dazu, so heißt dieses doch nichts anders, als daß die 40 noch um $\frac{1}{3}$ vermindert werden soll. Nun ist aber $40 - \frac{1}{3} = 26\frac{2}{3}$. Wenn nämlich dem Ganzen noch ein Drittel beigefügt wird, so ist der

Betrag desselben natürlich $\frac{4}{3}$; wird diesen $\frac{1}{3}$ entzogen, so ist dies $\frac{1}{3}$ von $\frac{4}{3}$, das ist $\frac{1\frac{1}{3}}{3}$ oder $\frac{4}{9}$.

Wenn aber dem Ganzen $\frac{4}{9}$ genommen werden, so bleiben noch $\frac{5}{9}$; folglich sind auch hier nur $\frac{5}{9}$ von derjenigen Zahl zu nehmen, die den Betrag von $\frac{4}{3}$ ausdrückt. Da hier die gegebene concrete Zahl 40 ist, so hat man nur $\frac{5}{9}$ davon zu suchen, das ist, wie oben, $=6\frac{2}{3}$. Dagegen werden dem Werthe nach $-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ sich in dieser Beziehung völlig aufheben; denn ein Ganzes $+\frac{1}{3}$ ist $\frac{4}{3}$; wird diesen vier Dritteln ein Drittel entzogen, so bleiben noch $\frac{3}{3}$, das ist das Ganze; also ist $(+\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=0$; da hingegen $+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{15}{16}$; denn ein Ganzes $+\frac{1}{1}\frac{1}{3}$ ist $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{5}$ von $\frac{4}{3}=\frac{4}{15}$ oder $\frac{4}{15}$; $\frac{4}{3}$ sind $4\times5=\frac{20}{15}$; $\frac{20-4}{15}=\frac{16}{15}$, das ist $1\frac{1}{15}$. Auf diese Weise ist $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=1+\frac{1}{15}$, und $30+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=32$; denn das Fünftel auf der zweiten Stelle ist anzusehen als $\frac{4}{15}$ oder $1\frac{1}{15}$ auf der ersten Stelle, weil eben das erste Drittel das gegebene Ganze zu $\frac{4}{3}$ erhebt. Da nun $\frac{1}{5}$ von $\frac{4}{3}$ noch nicht gleich ist einem Drittel von drei Dritteln, sondern nur $\frac{4}{5}$teln eines Drittels, so können nur $\frac{4}{5}$ des hinzugekommenen vierten Drittels vermindert werden; mithin bleiben noch übrig $\frac{3}{3}+\frac{1}{15}$, oder $1+\frac{1}{15}$. Wäre also die Zahl $30+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ da, so würde der Betrag seyn 32; denn 30 ist gleich 30; $\frac{1}{15}$ von 30 ist 2; $30+2=32$. Wäre aber $+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}$ da, so würde $2\times4=\frac{8}{15}$ von $4\times5=\frac{20}{15}$ abzuziehen seyn; $20-8=12$; $\frac{12}{15}=\frac{12}{15}$ oder $\frac{4}{5}$; mithin ist $1+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$. Man kann dies beispielsweise so darthun: $(3+\frac{1}{3})=40$; $40-\frac{8}{15}=24$. Da nun so eben bemerkt wurde, daß $(1+\frac{1}{3}-\frac{2}{5})$ gleich ist $\frac{4}{5}$, so muß $\frac{4}{5}$ von 30 gleich seyn 24; dies findet sich auch bestätigt.

Dies mag noch an einigen Beispielen weiter dargethan werden:

$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = 1\frac{1}{15}$.

$1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.

$1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{8}{15}$ (denn $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{3} = 3 \times 4 = \frac{12}{3}$ oder $\frac{12}{15}$; $\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$; $\frac{20 - 12}{15} = \frac{8}{15}$).

$1 + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} = \frac{4}{20}$ oder $\frac{1}{5}$.

$1 + \frac{1}{3} - \frac{5}{5} = 0$.

Eben so:

$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = 1\frac{1}{15}$.

$1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ (denn $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; $\frac{5}{3} - \frac{1}{5} = \frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$).

Die Theile heben sich mithin immer nur in so weit einander auf, als ihr Werth sich entgegengesetzt ist; und es ist deshalb nicht nöthig, erst allezeit die Operation an der gegebenen concreten Zahl zu erneuern.

Wenn z. B. das Verhältniß gegeben ist: $30 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} : 64 = 50$, so kann man sogleich $+ \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$, also $30 + \frac{1}{15} = 32$; mithin ist $32 : 64 = 50 : x$ dasselbe Verhältniß.

b) Daß die Potenz des vermehrenden oder vermindernden Theiles abhängt von der Größe oder Menge der ihm vorausgegangenen entgegengesetzten Theile.

α) Ist der letzte Theil vermindernd, so faßt er um so mehr in sich, je mehr und größer die ihm vorhergegangenen vermehrenden Theile waren. Denn je mehr die gegebene Zahl an Theilen zunimmt, desto mehr vermindert sie die darauf

auf folgende entgegengesetzte, und umgekehrt. Wer viel hat, dem wird viel genommen. Ist z. B. eine Zahl zuerst durch zwei vorhergegangene aliquote Theile, z. B. $+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, vermehrt worden, und nun wird der aliquote vermindernde Theil hinzugesetzt, so trifft diese Verminderung nicht nur die gegebene Zahl selbst, sondern auch zugleich einen jeden der neu hinzugekommenen Theile. Wäre hier der vermindernde Theil z. B. $\frac{1}{3}$, so müßte man der gegebenen Zahl erst $\frac{1}{3}$, dann dem Viertel, und dann auch dem Fünftel $\frac{1}{3}$ entziehen. Die ausführliche Operation läßt sich so darstellen:

$40 + \frac{1}{4}$ ist gleich $40 + 10$;
$40 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 40 + 10$ (d. i. 50) $+ 10 = 60$.

Hier tritt nun der vermindernde dritte Theil ein; er ist also $40 - \frac{1}{3} = 26\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$ von 40 betrug 10; dies $\frac{1}{3}$ vermindert $= 6\frac{2}{3}$. Das Fünftel auf der zweiten Stelle betrug nicht minder 10; auch diesen $\frac{1}{3}$ entzogen, bleibt $6\frac{2}{3}$; mithin bleiben noch $26\frac{2}{3} + 6\frac{2}{3} + 6\frac{2}{3} = 40$. Der Betrag dieses vermindernden Drittels war also, nach dem Abzuge von der gegebenen Proportionalzahl nur $13\frac{1}{3}$; nach dem dazu gekommenen Viertel wurde er schon $3\frac{1}{3}$ mehr, das sind $16\frac{2}{3}$; nach dem neu hinzugekommenen Fünftel wuchs er wieder $3\frac{1}{3}$, und wurde folglich 20.

β) Ist der letzte Theil vermehrend, so beträgt der Werth desselben um so weniger, je größer die ihm vorausgegangenen vermindernden Theile waren. Hier verliert die Potenz des letzten Theils in eben dem Maße, als die vorhergehenden Theile vermindernd wirken. Denn dem letzten Theile wird durch jeden der vorhergehenden ein Theil seiner selbst entzogen. Wäre $40 + \frac{1}{3}$ da, so würde dieses Drittel betragen $13\frac{1}{3}$. Von diesem Drittel wird aber genommen zuerst $\frac{1}{4}$,

da bleiben noch $\frac{3}{4\frac{1}{3}}$, oder $\frac{3}{12}$; von diesen noch $\frac{1}{5}$, bleiben $\frac{2\frac{2}{5}}{12}$, oder $\frac{12}{60}$, das ist $\frac{1}{5}$. Daher ist auch nach diesem Abzuge der Werth des Drittels nur so viel als $\frac{1}{5}$ auf der ersten Stelle; $\frac{1}{5}$ von 40 ist aber 8. Will man sich diese Wahrheit noch mehr veranschaulichen, so kann man es auf folgende Weise thun: $40 - \frac{1}{4} = 30$; $30 - \frac{1}{5} = 24$; das Drittel mehr muß nun seyn $\frac{1}{3}$ von 24, das ist 8. Man hat also nicht nöthig, alle concrete Zahlen durchzugehen, um den Betrag eines später stehenden aliquoten Theils zu finden. Der Werth desselben bestimmt sich durch die Vergleichung mit den ihm vorhergegangenen entgegengesetzten Theilen.

Auch hier mag ein Schema stehen:

Nach $(a + \frac{1}{3} + \frac{1}{4})$ ist $- \frac{1}{5} = + \frac{1}{3} \times a$.
[Denn $a + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{3} \times a$; das vermindernde Fünftel, oder $- \frac{1}{5}$, ist also eins der fünf Drittel von a, und der Werth desselben muß folglich $\frac{1}{3}$ a seyn. Denke man sich a als Bezeichnung der concreten Zahl 30, so ist $a + \frac{1}{3}$ gleich $30 + 10$, oder 40, und $a + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ gleich $40 + 10 = 50$; davon ist $\frac{1}{5} = 10$, das ist aber auch $\frac{1}{3}$ von 30, oder $\frac{1}{3}$ von der gegebenen concreten Zahl.]

Nach $(a + \frac{2}{3} + \frac{1}{4})$ ist $- \frac{1}{5}$ gleich $\frac{5}{12} \times a$.
[Denn $(a + \frac{2}{3}) = \frac{5}{3}$, $+ \frac{1}{4}$ von $\frac{5}{3} = \frac{5}{4}$, oder $1\frac{1}{4}$; $\frac{5 + 1\frac{1}{4}}{3} = \frac{6 + \frac{1}{4}}{3}$, oder $2\frac{1}{12}$, das sind $\frac{25}{12} \times a$; $- \frac{1}{5}$ ist folglich $\frac{1}{5}$ von $\frac{25}{12}$, das sind $\frac{5}{12}$; folglich ist $- \frac{1}{5}$ nach $(a + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{5}{12} \times a$. Setze man a als 30, so ist der Betrag des $- \frac{1}{5}$ nach $(30 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{5}{12} \times 30$, d. i. $5 \times 2\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$.]

Nach $(a + \frac{1}{3} + \frac{3}{4})$ ist $- \frac{1}{5}$ gleich $+ \frac{7}{15} \times a$.
[Denn $a + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{7}{3}$; $- \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ von $\frac{7}{3}$, das sind $1\frac{2}{5}$, oder $\frac{7}{15}$; dieß ist also der

Betrag des vermindernden Fünftels. Wäre a gleich 30, so würde $-\frac{1}{5}$ a nach $30 + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}$ gleich seyn $+\frac{7}{15} \times 30$, das sind $7 \times 2 = 14$. Anschaulicher wird es auf folgende Weise: $(30 + \frac{1}{3}) = 40$; $(40 + \frac{3}{4}) = 70$; $\frac{1}{5}$ von $70 = 14$, das ist aber auch $\frac{7}{15}$ von 30.]

Nach $(a + \frac{2}{3} + \frac{3}{4})$ ist $- \frac{1}{5} = + \frac{7}{12} \times a$. [Denn $a + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; $(\frac{5}{3} + \frac{3}{4}) = \frac{5}{3} + \frac{15}{4}$; diese $\frac{15}{4}$ sind aber auch $3\frac{3}{12}$ zu $5 = 8 + \frac{3}{12}$; $\frac{8}{3}$ sind $8 \times 4 = \frac{32}{12}$; $\frac{32+3}{12} = \frac{35}{12}$; davon ist $\frac{1}{5} = \frac{7}{12}$; folglich ist der Betrag eines Fünftels nach $(a + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}) = \frac{7}{12} \times a$.]

Nach $(a + \frac{1}{6} + \frac{1}{7})$ ist $\frac{1}{5} = \frac{4}{15} \times a$. [Denn $a + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$, $+ \frac{1}{7} = \frac{8}{6}$; $\frac{1}{5} \times \frac{8}{6} = \frac{8}{30}$ oder $\frac{8}{30}$; $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.]

Nach $(a + \frac{1}{6} + \frac{2}{7})$ ist $\frac{1}{5} = \frac{3}{10}$. [Denn $a + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$, $+ \frac{2}{7} = \frac{9}{6}$; $\frac{1}{5} \times \frac{9}{6} = \frac{9}{30}$ oder $\frac{9}{30}$, das sind $\frac{3}{10}$.]

Nach $(a + \frac{5}{6} + \frac{1}{7})$ ist $\frac{1}{5} = 17\frac{3}{42} \times a$, oder $\frac{88}{210} \times a$. [Denn $a\,\frac{5}{6} = \frac{11}{6}$, $+ \frac{1}{7} = \frac{11}{6}$, d. i. $\frac{11\frac{4}{7}}{6}$; $\frac{11 + 1\frac{4}{7}}{6} = \frac{12\frac{4}{7}}{6}$, d. i. $\frac{88}{42}$; $\frac{1}{5}$ von $\frac{88}{42}$ ist $\frac{17\frac{3}{5}}{42}$ oder $\frac{88}{210}$.] *)

Für den Fall, daß die vorhergehenden Theile vermindernd, der letzte aber vermehrend, wirken, mögen hier folgende Beispiele stehen:

*) Wenn man diese einzelnen Beispiele für sich selbst erweitert, und unter verschiedenen Gestalten betrachtet und bearbeitet, so wird man bald eine Fertigkeit sich erwerben, nach denselben Regeln alle mehrfach zusammengesetzte Verhältnisse auf einfache zurückzuführen, und darnach sein Verfahren einzurichten. Werden aber die Theile zu mannigfaltig, und die Verkettung zu verwickelt, um sie für den Verstand allein zu entwickeln, so wird uns dann die Form zu Hülfe kommen, und wir werden mit Recht zu den Ziffern und der eigentlich sogenannten Rechenkunst unsere Zuflucht nehmen.

Nach (a — $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{4}$) ist + $\frac{1}{5}$ = $\frac{1}{10}$ × a. [Denn a — $\frac{1}{3}$ = $\frac{2}{3}$; — $\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{3}$ = $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$ — $\frac{1}{6}$ = $\frac{3}{6}$, oder $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$ × $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{5}$, oder $\frac{1}{10}$; folglich ist $\frac{1}{5}$ nach — $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{10}$.]

Nach (a — $\frac{2}{3}$ — $\frac{1}{4}$) ist $\frac{1}{5}$ gleich $\frac{1}{20}$ × a. [Denn a — $\frac{2}{3}$ = $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{4/3}$, oder $\frac{3}{12}$; $\frac{1}{5}$ von $\frac{3}{12}$ = $\frac{3}{5/12}$, oder $\frac{3}{60}$, d. i. $\frac{1}{20}$. Setze man a als 120, so ist $\frac{1}{5}$ nach 120 — $\frac{2}{3}$ — $\frac{1}{4}$ gleich $\frac{1}{20}$ × 120, d. i. 6.

Nach (a — $\frac{1}{6}$ — $\frac{1}{7}$) ist $\frac{1}{5}$ = $\frac{1}{7}$ × a. [Denn a — $\frac{1}{6}$ — $\frac{1}{7}$ ist gleich a — $\frac{1}{7}$ — $\frac{1}{6}$; a — $\frac{1}{7}$ = $\frac{6}{7}$; $\frac{6}{7}$ — $\frac{1}{6}$ = $\frac{5}{7}$; $\frac{1}{5}$ von $\frac{5}{7}$ = $\frac{1}{7}$; folglich ist $\frac{1}{5}$ nach a — $\frac{1}{6}$ — $\frac{1}{7}$ = $\frac{1}{7}$ × a.]

Nach (a — $\frac{1}{6}$ — $\frac{2}{7}$) ist $\frac{1}{5}$ = $\frac{2}{21}$ × a. [Denn a — $\frac{1}{6}$ = $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{6}$ — $\frac{2}{7}$ = $\frac{15}{6}$, das sind $2\frac{1}{6}$; $\frac{5 - 2\frac{1}{7}}{6}$ = $\frac{20}{6}$, das sind $\frac{20}{42}$; davon ist $\frac{1}{5}$ $\frac{4}{42}$, d. s. $\frac{2}{21}$; folglich ist $\frac{1}{5}$ nach a — $\frac{1}{6}$ — $\frac{2}{7}$ = $\frac{2}{21}$.]

c) Daß der Werth eines jeden aliquoten Theils nur von den vorhergegangenen, aber keinesweges von den ihm nachfolgenden Theilen abhänge. Denn die nachfolgenden Theile werden durch die vorhergegangenen bestimmt, weil die letztern immer als zugehörig der Zahl, an welcher operirt wird, angesehen werden. Ein jeder aliquote Theil setzt aber dieser Zahl selbst eine Grenze, und hängt mithin von den nachfolgenden Theilen, die außerhalb dieser Grenze liegen, nicht im mindesten ab. Dagegen ist es allezeit der letzte Theil, welcher auf alle übrigen zurückwirkt, und dem Ganzen einen Ausschlag giebt *). Von hier

*) So ist z. B. (a + $\frac{2}{3}$) die ganze Summe, die nun auf alle folgende Bestimmungen keinen Einfluß hat. Setze man aber noch einen aliquoten Theil dahinter, so hat dieser natürlich Einfluß auf die Zahl a selbst, und auf das Drittel, indem

aus muß man dann ein jedes Verhältniß als ein einfaches ansehen und behandeln.

Um dem Ganzen noch mehr Verständlichkeit zu geben, mögen noch folgende Aufgaben hier stehen.

Aufgabe:

$(20 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}) : 60 = 90 : x.$

Auflösung:

$a + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $+ \frac{1}{5} = \frac{4}{3}$; $\frac{4 - \frac{4}{5}}{3} = \frac{3\frac{1}{5}}{3}$, oder $1\frac{1}{15}$, das sind $\frac{16}{15}$; folglich ist die erste Verhältnißzahl: $(20 + \frac{1}{15}) : 60 = 90 : x.$ Dieß umgesetzt, ist $20 : 60 = 90 + \frac{1}{16} : x$; $(90 - \frac{1}{16}) = 84\frac{3}{8}$. Nun ist $60 = 3 \times 20$; folglich ist die unbekannte Zahl $3 \times 84\frac{3}{8}$, das sind $253\frac{1}{8}$. Die vollständige Proportion ist demnach $(20 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}) : 60 = 90 : 253\frac{1}{8}$ *).

Aufgabe:

$(20 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) : 60 = 90 : x.$

Auflösung:

$a - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = a - \frac{1}{5}$; folglich $20 - \frac{1}{5} : 60 = 90 : x$. $60 = 3 \times 20$; $(60\frac{1}{4})$ ist folglich $(3\frac{1}{4})$, das sind

es beide verändert, und nach Maßgabe entweder vermehrt oder vermindert.

*) Man wähne nicht, daß man für das gemeine Leben diese Art der Rechnungen entbehren könne. Der dritte Theil behält es sich vor, näher in's Licht zu setzen, daß diese, so wie manche mehr wissenschaftlich scheinende Combinationen, die bisher vorkamen, unmittelbar in jede Art der im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungen mit einfließen. Ich will für den obigen Fall nur ein Beispiel wählen: Ein Pachter miethet von einem Gutsbesitzer ein Stück Landes von 20 unbestimmten Längenmaßen; davon zieht er jährlich 90 Rtlr. Gewinn. Durch Fleiß wird das Land in den folgenden Jahren um $\frac{1}{3}$ einträglicher. Der Gutsbesitzer fordert jetzt $\frac{1}{5}$ mehr Pacht. Dieses willigt der Pachter, unter der Bedingung, daß sein Herr ihm nun, anstatt der 20 Längenmaße, 60 gebe. Wie viel erwirbt sich jährlich der Pachter? Hier ist also ganz der obige Fall: $(20 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}) : 60 = 90 : 253\frac{1}{8}$. Der Pachter erwirbt also jährlich 253 Rtlr. 8 gr.

$3\frac{3}{4} \times 20$. Da nun 90 gleich ist der Zahl 20, so ist x $3\frac{3}{4} \times 90$; $270 + 67\frac{1}{2}$, das sind $337\frac{1}{2}$. Die ganze Proportion ist demnach

$$(20 - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5}) : 60 = 90 : 337\tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe:

$$(40 + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{5}) : 100 = 90 : x.$$

Auflösung:

$(a + \frac{1}{6}) = \frac{7}{6}$; $(-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}) = +\frac{1}{20}$; [denn $-\frac{1}{4}$ bleibt $\frac{3}{4}$, $+\frac{2}{5} = 2 \times 3 = \frac{6}{4}$, oder $1\frac{1}{4}$; $\frac{3 + 1\frac{1}{2}}{4} = 1\frac{1}{20}$]; mithin $1 + \frac{1}{20} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{6} + \frac{7}{120}$; $\frac{6}{6} = 40$; $\frac{7}{6} = \frac{1}{6} > 40$; $\frac{1}{6}$ von $40 = \frac{40}{6}$; $\frac{7}{120} = \frac{7}{20}$ von $\frac{40}{6}$, das sind $7 \times 2 = \frac{14}{6}$; $\frac{40 + 14}{6} = \frac{54}{6}$, das sind 9 Ganze; $40 + 9 = 49$; Das vereinfachte Verhältniß ist demnach: 49 : 100 gleich 90 : x; 100 ist $2 + \frac{2}{49} \times 90 = 180 + 3\frac{33}{49}$. Die vollständige Proportion ist:

$$(40 + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{5}) : 100 = 90 : 183\tfrac{33}{49}.$$

Aufgabe:

$$(50 + \tfrac{2}{7} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{4}) : 150 = 30 : x.$$

Auflösung:

$50 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7}$; $-\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < \frac{9}{7} = \frac{6}{7}$; $+\frac{3}{4} = 3 \times \frac{6}{7} = 18 = 4\frac{1}{7}$; $\frac{6 + 4\frac{1}{2}}{7} = \frac{10\frac{1}{2} \text{ oder } \frac{21}{2}}{7}$, das sind $\frac{21}{14}$, oder $1\frac{1}{2}$. Nun ist $(50 + \frac{1}{2} : 150 = 30 : x$ gleich dem Verhältnisse $50 : 150 = 30 - \frac{1}{3} : x$; $(30 - \frac{1}{3}) = 20$; $150 = 3 \times 50$; x muß folglich seyn $3 \times 20 = 60$. Die vollständige Proportion ist demnach $(50 + \frac{2}{7} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4}) : 150 = 30 : 60$.

Ueber versteckte Verhältnisse.

Wenn mehrere arithmetische Größen so mit einander verglichen werden, daß der absolute Werth von keiner bestimmt gegeben ist, sondern erst durch Vergleichung gefunden werden muß, so sind zuerst die verschiedenen Größen zusammen zu stellen; dann muß die kleinste dieser Größen gesucht, und diese als Einheit fixirt werden. Nach dieser müssen sich dann alle übrigen richten. Diese Einheit ist oft sehr versteckt, und es erfordert eine mehrfache Vergleichung, um sie zu finden. Denke man sich z. B. folgende Aufgabe:

Es sind drei Größen vorhanden: A, B, C. Von diesen ist A so groß, als B und C zusammengenommen; B ist drei mal so groß als C. Hier würde man nun gleich sehen, daß A eine zusammengesetzte Zahl enthalte, und mithin nicht die Einheit darstellen könne. Nun heißt es: B ist drei mal C. In Beziehung auf B muß also C seyn 1. B ist nun drei mal Eins, d. i. 3. A ist gleich B und C zusammengenommen, mithin $3 + 1$, das ist 4. Wird hier das Verhältniß einer jeden einzelnen Zahl nach gefragt, so ist C von B ein Drittel, von A $\frac{1}{4}$, und von beiden zusammengenommen $\frac{1}{7}$. Dagegen ist B von A $\frac{3}{4}$, und von A und C zusammengenommen $\frac{3}{5}$. Sollte nach den Differenzen dieser verschiedenen Größen gefragt werden, so würde sich ebenfalls sehr leicht ergeben, daß der Unterschied zwischen C und B drei, hingegen zwischen A und C 4, zwischen A und B

aber 1 seyn müsse; indem die C, oder Eins, von jeder der durch A und B angezeigten Größen gerade auf diese Weise wiederholt wird. Wäre nun eine dieser arithmetischen Größen einer concreten Zahl, z. B. 60, gleich, so würde sich nach dem eben angegebenen Verhältnisse der Betrag einer jeden, so wie der Gesammtsumme, leicht finden lassen.

Es könnte auch diese concrete Zahl der Differenz zwischen der einen und andern Zahl gehören, und man würde mit gleicher Leichtigkeit die Operation vollbringen.

[Wenn man zur Vollbringung dieser Art arithmetischer Operationen einer Versinnlichung bedarf, so wird es am zweckmäßigsten durch Linien geschehen können. Man zieht nämlich so viel Linien, als man arithmetische Größen hat, und löscht von einer jeden derselben gerade so viel weg, als die Aufgabe fordert, bis man endlich die kleinste gefunden, die dann als Eins gesetzt und behandelt wird. Wenn in dem obigen Falle A der erste Strich wäre, so müßten, nach der Bestimmung, daß A so viel betrage, als B und C zusammengenommen, die beiden Linien BC verkleinert werden. Nach der zweiten Bestimmung muß nun C als der kleinste, B drei, und A vier mal so groß gezeichnet werden.]

Es wird der größern Deutlichkeit wegen nicht überflüssig seyn, sogleich einige Uebungen anzureihen.

a) Vier ungleiche Zahlen A, B, C, D. A ist so groß als B und C; C ist 5 mal D, und B ist zwei mal C. Da A gleich ist B und C zusammengenommen, so muß es größer seyn, als jede von diesen arithmetischen Größen für sich allein genommen. B ist zwei mal C. In Beziehung auf diese drei wäre C allerdings Eins; aber es hieß, daß C noch fünf mal D sey. Dieses D aber ist die geringste Größe, oder die Eins, nach welcher nun die übrigen Theilungen und

Verhältnisse bestimmt werden müssen. C ist $5 \times D$; folglich auch $5 \times 1 = 5$. B ist $2 \times C$, d. i. $2 \times 5 = 10$. A ist so groß als B und C, d. i. $10 + 5 = 15$. Auf diese Weise ist das richtige Verhältniß vermittelt.

b) Vier Größen A, B, C, D.

$$A = C + D.$$
$$B = 3 \times D.$$
$$C = 4 \times B.$$

Da $C = 4 \times B$, so ist in dieser Beziehung $B = 1$. B ist aber hinwiederum $3 \times D$. D ist demnach in Hinsicht auf B Eins, und B selbst ist in Beziehung auf C Eins. Werden die drei Größen zusammengestellt, so ist B drei mal D; und weil C wiederum $4 \times B$ ist, so muß es auch seyn $4 \times 3 \times C$, oder $D = 1$; $B = 3$; $C = 4 \times 3 = 12$; A hingegen $= C + D$, d. i. $12 + 1 = 13$. In Zahlen ausgedrückt würden 13, 3, 12, 1 die vier Größenverhältnisse darstellen.

Der Beweis ist also:

da $C = 4 \times B$,
$B = 3 \times D$,
$A = C + D$,

so ist $D = 1$,	das ist $D = 1$,
$B = 3 \times 1$	$B = 3$,
$C = 4 \times 3$	$C = 12$,
$A = 4 \times 3 + 1$	$A = 13$.

Es ist völlig gleichgültig, welche Zahl man zur Einheit macht, nur muß man sich im allgemeinen folgendes merken:

a) Die kleinste Zahl ist in Beziehung auf eine größere allezeit als Einheit zu behandeln.

b) Diese Einheit ist nur relativ, und kann hinwiederum mehrere Einer unter sich begreifen; dann ist sie, in Beziehung auf eine ihr übergeordnete gröſsere Zahl, eine combinirte (zusammengesetzte) Einheit. Wenn $A = 3 \times B$, so ist B, in Beziehung auf A, Einheit. Kommt nun noch eine dritte Gröſse C dazu, welche kleiner ist als B, so ist diese die Eins. Gesetzt also B sey $4 \times C$, so bleibt zwischen A und B immer dieselbe Beziehung; aber in Beziehung auf C und A zugleich ist B eine combinirte Einheit, welche $4 \times C$, das hier als absolute Einheit gesetzt ist, in sich faſst. Ist B nun $4 \times C$, so muſs A seyn 3×4, das sind $12 \times C$.

c) Die niedrigste oder kleinste dieser Zahlen wird dann als absolute gesetzt, weil sie den Maſsstab zu allen übrigen angiebt. Wenn $A = 4 \times B$. B ist $5 \times C$. C ist dann die Zahl, welche nicht mehr wiederholt wird, sondern nur im Verhältniſs mit den übrigen ihr übergeordneten gröſsern Zahlen besteht. C ist nun von B $\frac{1}{5}$, von A aber $\frac{1}{20}$, und von beiden $\frac{1}{25}$.

Eine gröſsere Anzahl von arithmetischen Gröſsen machen zwar die ganze Operation länger, und in dieser Hinsicht verwickelter, aber deshalb vermehren sie keinesweges die Schwierigkeiten.

Es seyen z. B. 5 Gröſsen A, B, C, D, E gegeben:

A sey $2 \times C + \frac{2}{3} \times B$,
B sey $5 \times C$,
$C = 3 \times D$,
$E = 2 \times A$.

Da A $2 \times C$ und noch $\frac{2}{3} \times B$ ist, so kann es nicht die einfachste Gröſse seyen. B kann sie auch nicht seyn, weil B $5 \times C$ enthält. C enthält aber wiederum $3 \times D$, und kann daher auch

noch nicht einfach genug seyn; wohl aber enthält D keine niedrigere Größe mehr, und ist also in dieser Beziehung 1. E enthält $\frac{2}{3}$ von A, und kann mithin nicht eher bestimmt werden als A.

Wenn D Eins ist, so ist C 3, B ist $5 \times C$; folglich $5 \times 3 = 15$; $A = 2 \times C + \frac{2}{3} B$, das sind $2 \times 3 + \frac{2}{3} \times 15$, das sind $6 + 10 = 16$. E ist $\frac{2}{3}$ von A; folglich $\frac{2}{3}$ von 16, das sind $10\frac{2}{3}$. Das Ganze ist nun

$$\begin{aligned} A &= 16, \\ B &= 15, \\ C &= 3, \\ D &= 1, \\ E &= 10\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Es ist übrigens keinesweges nothwendig, daß man allezeit die mit Buchstaben bezeichneten Größen in Zahlen umsetze. Man kann eben sowohl die Buchstaben beibehalten, indem man so operirt:

Da $A\ 2 \times C + \frac{2}{3} \times B$,
$C\ 3 \times D$,
und $B\ 5 \times C$ ist,
so muß $B = 5 \times 3 = 15 \times D$,
$A = 2 \times 3 + \frac{2}{3} \times 15 = 6 + 10 \times D$,
$E = \frac{2}{3} \times 16 = 10\frac{2}{3} \times D$.

Einige hieher gehörige Aufgaben mögen dieß Kapitel beschließen.

Aufgabe.

Vier Größen A, B, C, D.

$$\begin{aligned} A &= 2 \times C + \tfrac{1}{2} \times B, \\ D &= 3 \times A, \\ B &= 5 \times C; \end{aligned}$$

wie viel beträgt eine jede dieser Größen, wenn C gleich ist der Summe 80?

Auflösung.

$B = 5 \times C$; $C = 80$; folglich ist B $5 \times 80 = 400$.

[Da $D = 3 \times A$, so muß erst A gesucht werden.]

$A = 2 \times C$, d. s. 2×80 und zugleich $\frac{1}{2} \times B$. Da $B = 5 \times C$, so ist es $\frac{1}{2} \times 5 \times C$; $\frac{1}{2}$ von $5 = 2\frac{1}{2}$; folglich ist A $2 + 2\frac{1}{2} \times C$, das sind $2 + 2\frac{1}{2}$ oder $4\frac{1}{2} \times 80 = 360$. D ist $3 \times A$; folglich $3 \times 4\frac{1}{2} \times C$, das sind $13\frac{1}{2} \times C$, oder $13\frac{1}{2} \times 80$, oder $3 \times 360 = 1080$.

Die vier Größen sind also in Zahlen

$$\begin{aligned} A &= 360; \\ B &= 400, \\ C &= 80, \\ D &= 1080. \end{aligned}$$

Es kann auch die concrete Zahl einer andern, als der als Einheit aufgefaßten Größe, zugetheilt werden. Dann bleibt die Operation zwar dieselbe, aber bei dem Aufsuchen der concreten Zahl für jede Größe muß dann diejenige Größe, welcher die concrete Zahl selbst gegeben ist, als relative Einheit aufgefaßt werden.

Wir wollen annehmen, daß z. B. die Zahl 80 der ersten Größe, also A gehöre, so würde hier für A $(2 + 2\frac{1}{2} \times C)$ die Zahl $4\frac{1}{2}$ gesetzt werden können; $4\frac{1}{2}$ sind $\frac{9}{2}$; $C = 1$ Ganzes, das sind $\frac{2}{2}$.

$B = 5 \times C$; folglich 5 Ganze, d. s. $\frac{10}{2}$.
$D = 3 \times A$, oder $3 \times \frac{9}{2} = \frac{18}{2}$.

So wäre nun das Verhältniß

$$\left.\begin{aligned} B &= \tfrac{10}{9} \times \\ C &= \tfrac{2}{9} \times \\ D &= 3 \times \end{aligned}\right\} A.$$

$A = 80$; folglich ist B $\frac{10}{9}$ oder $1 + \frac{1}{9} \times 80 = 88\frac{8}{9}$.
$C = \frac{2}{9} \times A$; folglich $\frac{2}{9} \times 80$, das sind $17\frac{7}{9}$.
$D = 3 \times A$; folglich $3 \times 80 = 240$.

A wurde hier als Einheit gesetzt, weil darnach die concrete Zahl 80 gemessen werden mußte. Aber sie konnte nur durch Relation auf die übrigen Größen, welche als ihre Theile angesehen wurden, Einheit werden. Das Verhältniß, oder der relative Werth der Größe selbst, ohne Rücksicht auf die gegebene Zahl 80, kann nur durch das Aufsuchen der kleinsten Zahl gefunden werden, wodurch die absolute, das ist die letzte untheilbare Einheit, gefunden werden möchte, die hier durch das Verhältniß der 1 zu 9 oder als Neuntel fixirt wurde.

Endlich kann die concrete Zahl auch der Differenz zweier Größen ertheilt werden. Dann würde die Aufgabe etwa in dieser Form aufgestellt werden:

A $2 \times C + \frac{1}{2} \times B$,
D $3 \times A$,
B $5 \times C$;

wie viel beträgt eine jede dieser Größen, wenn die Differenz zwischen A und B gleich ist der Summe 80?

Auch hier kann zunächst das Größenverhältniß aller der genannten Theile, wie oben, auf Zahlen reducirt werden. Es bedarf dann nur einer Vergleichung der nach C gemessenen Größen, um die Differenz aller Theile genau zu bestimmen. Durch die oben schon vollbrachte Operation ergab es sich, daß $B = 5 \times C$, und A $4\frac{1}{2} \times C$ ist; das Verhältniß der beiden durch A und B bezeichneten Größen läßt sich also durch die Zahl $4\frac{1}{2}$ und 5 ausdrücken; die Differenz ist hier nur $\frac{1}{2}$.

Da $A = 4\frac{1}{2}$, das sind $\frac{9}{2}$, so enthält es die Differenz zwischen A und B, das ist $\frac{1}{2}$, 9 mal $D = 3 \times A$; folglich $3 \times 9 \times \frac{1}{2}$, das ist die gedachte Differenz. $C = 1 \times \frac{1}{2}$, und ent-

hält die Differenz 2 mal. $B = 5 \times C$; folglich $5 \times 2 \times = 10 \times \frac{1}{2}$.

Wenn nun diese Differenz gleich ist der Zahl 80, so ist

A $9 \times 80 = 720$.
B 27×80, oder $3 \times 720 = 2160$.
C $2 \times 80 = 160$.
D $10 \times 80 = 800$.

Ganz anders wäre das Resultat ausgefallen, wenn man der Differenz von D und B dieselbe concrete Zahl verliehen hätte. Denn da die Differenz dieser beiden Größen, die sich wie 5 zu $13\frac{1}{2}$ verhalten, gleich ist der Zahl $8\frac{1}{2}$, oder $\frac{17}{2}$, so muß alles hiernach berechnet werden. A ist $4\frac{1}{2}$, das sind $\frac{9}{2}$, oder $\frac{9}{2} = \frac{9}{17} \times \frac{17}{2}$; folglich: $\frac{9}{17} \times 80 = 9 \times 4\frac{12}{17} = 36 + 6\frac{6}{17}$, das sind $42\frac{6}{17}$. $B = 5$, das sind $\frac{10}{2}$; $\frac{10}{2} = \frac{10}{17} \times \frac{17}{2}$; folglich: $\frac{10}{17} \times 80 = 10 \times 4\frac{12}{17} = 40 + 6\frac{16}{17} = 46\frac{16}{17}$. $C = 1$, das sind $\frac{2}{2} = \frac{2}{17} \times \frac{17}{2}$, oder $\frac{2}{17} \times 80 = 2 \times 4\frac{12}{17} = 8 + 1\frac{7}{17}$, das sind $9\frac{7}{17}$. $D = 13\frac{1}{2}$, das sind $\frac{27}{2}$, oder $\frac{27}{17}$, das ist $1\frac{10}{17} + 80 = 80 + 46\frac{16}{17} = 126\frac{16}{17}$.

Die Verschiedenheit der vorausgesetzten Bedingungen mußte natürlich die Verschiedenheit der Resultate von selbst erzeugen.

Aufgabe.

Fünf Größen A, B, C, D, E.

$$B = 3 \times A + \frac{4}{7} \times D,$$
$$E = 4 \times B + \frac{1}{3} \times D,$$
$$D = 7 \times A,$$
$$C = \frac{2}{3} \times B + \frac{1}{2} E;$$

wie viel mal enthält eine jede der genannten Größen die Größe A?

Diejenige der hier aufgezählten Größen, welche keine niedrige mehr unter sich begreift, ist A. $B = 3 \times A$, das ist $3 + \frac{4}{7} \times D$. D ist aber $7 \times A$; folglich $\frac{4}{7} \times 7 = 4$. B ist also $3 + 4$, das ist $7 \times A$. $E = 4 \times B$, das ist $4 \times 7 = 28 \times A$. Dazu kommt aber noch $\frac{1}{2} \times D$; D ist aber $7 \times A$; $\frac{1}{2} \times D$ ist also $\frac{1}{2} \times 7 = 3\frac{1}{2} \times A$. Nun ist $28 + 3\frac{1}{2} = 31\frac{1}{2} \times A$. $D = 7 \times A$. $C = \frac{2}{3} \times B$, das ist $\frac{2}{3}$ von $7 = 4\frac{2}{3} + A$ und $\frac{1}{2} \times E$, das ist $\frac{1}{2} \times 31\frac{1}{2} = 15\frac{3}{4} A$. $4\frac{2}{3} + 15\frac{3}{4} = 20\frac{5}{12} \times A$.

Das Ganze ist also:

$$\left.\begin{array}{l} B = 7 \\ C = 20\frac{5}{12} \\ D = 7 \\ E = 31\frac{1}{2} \end{array}\right\} \times A.$$

Setze man nun, daß A gleich sey der Summe 50, so sind die, jenen unbekannten Größen beigesetzten Multiplicatoren des A dadurch Multiplicatoren der Zahl 50, und es ergiebt sich, daß

$A = 50$,
$B = 7 \times 50 = 350$,
$C = 20\frac{5}{12} \times 50 = 1000 + 20\frac{5}{6}$, d. i. $1020\frac{5}{6}$,
$D = 7 \times 50 = 350$,
$E = 31\frac{1}{2} \times 50 = 1575$.

Ertheilt man einer andern dieser Größen, z. B. B, dieselbe concrete Zahl, so müssen erst alle übrigen mit ihr verglichen werden. Es ergiebt sich dann folgendes Verhältniß:

$A = \frac{1}{7} \times B$; folglich $\frac{1}{7} \times 50 = 7\frac{1}{7}$.
$B = 50$.
$C = \frac{20}{7} + \frac{5}{12} \times B$; $\frac{20}{7}$ oder $2\frac{6}{7} + \frac{5}{12} = 2\frac{77}{84} \times 50$
$= 145\frac{5}{42}$.
$D = \frac{7}{7} \times B = \frac{7}{7}$, oder 1×50.
$E = \frac{31}{7} + \frac{1}{2} \times B = \frac{31}{7} + \frac{7}{2}$, oder $4\frac{3}{2} + 50 = 205$.

Anders wird das Resultat ausfallen, wenn die Differenz von C und E 50 betrüge. Hier ergiebt sich, daß die Differenz ist $11\frac{1}{12} = \frac{133}{12}$. Das Größenverhältniß ist nun folgendes: $A = 1$, das sind $\frac{12}{12}$; dies ist von $\frac{133}{12}$ $\frac{12}{133}$. Da $\frac{133}{12}$ gleich ist der Zahl 50, so ist $A\ \frac{12}{133}$ von 50, das sind $4\frac{68}{133}$. $B = 7$, das sind $\frac{84}{12} = \frac{84}{133}$ von $\frac{133}{12}$; folglich $\frac{84}{133}$ von $50 = 31\frac{77}{133}$. $C = 20\frac{5}{12} = \frac{245}{12} = \frac{245}{133}$, oder $1\frac{112}{133} \times 50 = 92\frac{14}{133}$. $D = 7$, das sind $\frac{84}{12} = \frac{84}{133} \times 50 = 31\frac{77}{133}$. $E = 31\frac{1}{2}$, das sind $\frac{378}{12}$; folglich $\frac{378}{133}$, oder $2\frac{112}{133} \times 50 = 142\frac{14}{133}$.

Eine größere Ausführlichkeit würde hier um so mehr am unrechten Orte seyn, da in dem dritten Theile, der Anwendung auf kaufmännische Rechnungen, noch einmal dieselben Operationen vorkommen müssen.

Ende des ersten Theils.

Des

Lehrbuchs

der

arithmetischen Verhältnisse

zweiter Theil.

Enthaltend

Anleitung zum schriftlichen Rechnen.

---

§. 1.

Diejenigen Zeichen, durch welche wir die Zahlen auszudrücken pflegen, heißen Ziffern. Man muß die Ziffern nicht mit den Zahlen selbst verwechseln. Denn jene verhalten sich zu diesen nicht anders, als sich überhaupt das Zeichen zu dem Bezeichneten, oder als das Symbol zu dem Gegenstande verhält. Mit Ziffern läßt sich eigentlich nicht rechnen, sondern nur eine Zahl ausdrücken. Daraus geht, wie man leicht sieht, von selbst hervor: Daß die Ziffern nicht eher verstanden werden können, mithin auch nicht früher gebraucht werden dürfen, als bis der Schüler mit Zahlen umzugehn weiß. Da aber eigentlich nur bis 9 gezählt wird, und auch nur 9 Ziffern vorhanden sind, so ist derjenige Zeitpunkt, wo das Kind mit den 9 Zahlen bekannt ist, auch die Periode, wo es Zeit ist, es mit den Ziffern bekannt zu machen. Man hat zwar künstliche Mittel anzuwenden versucht, um die Kenntniß der Ziffern zu erleichtern und zu versinnlichen. Dazu gehört vorzüglich, daß man durch Striche Zahlen entstehn läßt. Z. B. 2 (2), 3 (3), 4 (4), 5 (5), 6 (6), 7 (7), 8 (8), 9 (9). Man hat auch wohl schon behauptet, daß die Gestalt der Zahlen sich auch wirklich so gebildet habe. Allein, das ist wenigstens sehr precär angenommen. Die Ziffern sind nicht selbst Zahlen, sondern Zeichen, gleichsam Buchstaben für Zahlen, und als solche muß man sie auch behandeln. Es ist also nichts weiter nö-

thig, als das Zeichen hinzuschreiben und zu nennen; und eben so wenig als man berechtigt ist, von der Form des Buchstabens Rechenschaft zu geben, eben so wenig hat man nöthig, die Gestalt der Ziffern zu erklären. Der Zögling erfährt nur die Bedeutung derselben. Dies ist, nach den gehörigen Vorübungen, der kürzeste Weg.

§. 2.

So wie die Zahl Zehen, oder Zig, als Einheit aufgefaßt werden muß, eben so geht es auch mit den Ziffern. Man bedient sich zu einer jeden zusammengesetzten Zahl nur derselben Ziffern. Aber damit man die collective Einheit 1 Zig, oder 1 Hundert, unterscheide von der simpeln Eins, so bedient man sich dazu einer verschiedenen Stellung der Zahl. Man setzt nämlich allemal diejenige Ziffer, welche die größte collective Einheit bezeichnet, auf den ersten Platz, von der Rechten zur Linken gerechnet. Ist hinter der ersten Zahl keine mehr, so bedeutet diese Zahl nur Einer. So ist 2 nur zwei Einer. Steht aber hinter derselben noch irgend eine andere Ziffer, so sieht man, daß zwei Stellen vorhanden sind; und dann bedeutet die Zahl, welche auf der ersten Stelle steht, Zig, und diejenige, welche auf der zweiten sich befindet, zeigt die Einer an. So wird nun 21 bedeuten: zwei Zig und 1, oder ein und zwanzig; und wenn 11 da steht, so bedeutet die 1 auf der ersten Stelle ein Zig, und auf der zweiten einen Einer. Also 11 ist 1 Zig und Eins oder Eilf. Man merke aber in Ansehung der Art, die Zahl auszusprechen, folgendes: Die Einer werden allezeit vor den Zig, und die Zig nach den Einern ausgesprochen. Sind aber Hundert da, so werden diese zuerst vor den Einern, und die Zig zuletzt ausgesprochen. Denke man sich nun eine dritte Zahl hinzu, welche hinter

der zweiten Stelle sich anschließt, z. B. 111, so bedeutet die erste Stelle ein Hundert, die zweite ein Zig, und die dritte einen Einer. Also bedeutet 111 ein Hundert, ein Zig und Eins, oder ein Hundert und eilf. Eben so bedeutet 222 die erste Zahl zwei Hundert, die zweite zwei Zig, und die dritte zwei Einer. Das Ganze ist also zwei Hundert zwanzig und zwei. Da aber, wie eben bemerkt wurde, die Einer allemal unmittelbar nach den Zig ausgesprochen werden müssen, so lieset man 222 zwei Hundert und zwei und zwanzig, 436 vier Hundert und sechs und dreißig. Wenn vier Zahlen vorhanden sind, so bedeutet diejenige Zahl, welche auf der ersten Stelle steht, eben so viel Tausend, als sie Einer ausdrückt, und auf der zweiten Stelle eben so viel Hundert auf der dritten so viele Zig u. s. f. Sonach bedeutet nun 7364 sieben Tausend drei Hundert sechszig und vier Einer, oder sieben Tausend drei Hundert und vier und sechszig. Wenn der unter diesen vier Zahlen auf der ersten Stelle sich befindlichen Sieben noch eine fünfte Zahl vorgesetzt wird, so bedeutet dies Zig Tausend. Gesetzt diese Zahl wäre 4, so müßte sie auf dieser Stelle 4 Zig Tausend anzeigen, und die Summe 47364 würde gelesen sieben und vierzig Tausend drei Hundert und vier und sechszig. Setzt man diesen fünf Zahlen noch eine sechste vor, so bedeutet diese hundert Tausend. Die Zahl 5 würde also auf dieser Stelle bedeuten 5 mal hundert Tausend, und die Summe 547364 muß ausgesprochen werden: fünf hundert und sieben und vierzig Tausend drei Hundert und vier und sechszig. Zehn mal hundert Tausend machen erst eine Million aus. Diejenige Zahl also, welche noch vor die Fünf gesetzt würde, würde erst eine Million bezeichnen. Setze man z. B. noch 9 vor, so sind es 9 Millionen u. s. f. Ist die Anzahl noch größer, so geht die Fortschreitung eben so

fort, wie vorher; es werden nämlich wieder Zig Millionen, Hundert, Tausend, zehn Tausend, hundert Tausend, zehn mal hundert Tausend. Tausend mal tausend Millionen sind eine Billion *).

Um aber eine größere Zahlenreihe zu übersehn, und dem Werthe nach zu schätzen, so theile man sie von der Rechten zur Linken hin in mehrere Klassen; so, daß in einer jeden Klasse drei Zahlen sich befinden. Z. B. 783,657,892. Hier sieht man gleich, daß die Fortschreitungen sind: Einer, Zig, Hundert, ein Tausend, Zig Tausend, Hundert Tausend, Eine Million, Zig Millionen, hundert Millionen. Die ganze Summe wird also ausgesprochen: sieben hundert und drei und achtzig Millionen sechs hundert und sieben und funfzig Tausend acht Hundert und zwei und neunzig.

Es könnte aber auch geschehen, daß sich an einer Stelle keine Zahl fände, daß z. B. zwar Zehner oder Hunderte, aber keine Einer da wären. In diesem Falle bedürfte es nur eines Zeichens, um die Stelle auzudeuten, auf der eine Ziffer steht. Dieses Zeichen ist die o, welche zur Ausfüllung einer Stelle da ist. Wenn z. B. 2 vorhanden wäre, so müßte man diese natürlich als zwei Einer lesen. Wenn hingegen auf die Stelle der Einer eine o gesetzt wird, und die 2 ihr vorher geht, so bedeutet diese nicht mehr zwei Einer, sondern zwei Zig. Setzt man noch eine Null dahinter, so wird dadurch die Zahl 2 noch eine Stelle vorgerückt, und bedeutet nun zwei Hundert u. s. f. Die Null zeigt also nichts weiter an, als den Mangel einer Ziffer auf derjenigen Stelle, worauf sie sich befindet. So z. E. würde 304 anzei-

*) Man hat berechnet, daß, wenn jemand anfinge jedes Einzelne zu zählen, er in neunzehntausend Jahren zur ersten Billion kommen würde. Vorausgesetzt er zähle ununterbrochen fort.

gen: drei Hundert kein Zig und vier Einer, und ausgesprochen: drei Hundert und vier.

In Ansehung der Methode ist nur noch zu bemerken, daß man sogleich die Schüler, nachdem ihnen die Zeichen bekannt sind, auf die Ordnung aufmerksam mache, in welcher die Zahlen stehn. Dies geschieht dadurch, daß man zuerst durch Striche drei Stellen andeutet, die man, sobald man von unten herauf, das ist von den Einern zu den Zig, Hundert u. s. w. steigen will, von der Rechten zur Linken zählen muß. Die letzte Stelle, oder von der Rechten zur Linken die erste, wird genannt die Stelle der Einer, die zweite Stelle der Zig, und die dritte Stelle der Hundert.

Stelle der Hundert.	Stelle der Zig.	Stelle der Einer.
1	2	3
Ein Hundert	Zwanzig	Drei
9	6	7
Neun Hundert	Sechszig	Sieben.

Nun fahre man so fort:

1	2	3
II	22	34
III	222	345
IIII	2222	3456
IIIII u. s. f.	22222 u. s. f.	34567

Hierdurch lernt der ungeübte Schüler zugleich sehn, wie durch diese Progression der Werth einer jeden Ziffer sich verändert, sobald dieselbe eine Stelle vorgerückt wird. Es folgt hierauf die Uebung, eine längere Ziffernreihe mit Fertigkeit zu lesen. Gewöhnlich fordert diese Uebung sehr wenig Zeitaufwand, und kann nur dann Schwierigkeit haben, wenn man es unterlassen hat, zuvor die Zahl ohne Zeichen zu behandeln.

Addition.

§. 3.

Wenn man eine Zahl zu einer andern hinzuthut, so entsteht eine dritte Zahl, welche in Ansehung ihres Werthes der Inbegriff von beiden ist. Dieses Verfahren nennt man Addiren. Diejenigen Zahlen, welche addirt werden sollen, schreibt man unter einander, und durch einen darunter gezogenen Strich zeigt man an, daß man von beiden oder mehreru gegebenen Summanden (so nennt man die Zahlen, welche addirt werden sollen) die Summe suchen will. Z. B.

378
524

Hier muß man merken:

a) daß eine jede Ziffer auf diejenige Stelle geschrieben werde, auf welcher sie ihrem Werthe nach gehört. Also die Einer auf die Stelle der Einer, Zig auf die der Zig u. s. f.

b) Wenn zwei oder mehrere Stellen vorhanden sind, so werden die collectiven Zahlen Zig, Hundert, Tausend u. s. f. nicht anders behandelt, als die Einfachen. Man hat also nicht nöthig, allemal den Werth der collectiven Zahl als solcher zu nennen, sondern nur die Einer zusammen zu zählen, z. B.

34
58

92

Man sieht hier, daß das Zig, welches bei 12 ist, mit in die übrigen Zig, die vorhanden sind, eingerechnet worden ist. Das muß auch seyn. Daher schreibt man in diesem Falle nicht allemal gleich die erste Zahl aus, sondern behält die Zig in Gedanken, und fügt sie der durch die Addition der Zig entstandenen Summe bei.

3 Zig und 5 Zig machen 8 Zig, und 8 und 4 Einer machen 1 Zig und 2 Einer. Nun sind 8 Zig und 1 Zig neun Zig, und die 2 Einer sind 92. Kommen dreistellige Zahlen hinzu, z. B.

734
658

so werden diese nicht anders behandelt, als Einer. 7 sind 13. Da diese beiden Zahlen auf der Stelle der Hundert stehen, so sind es dreizehn Hundert, das sind aber wiederum ein Tausend und drei Hundert, und die ganze Summe nebst den Summanden ist

734
658
1392

Setzen wir wiederum diesen gegebenen Zahlen noch andere vor, auf die Stelle der Tausend z. B. $\frac{9}{5}$, so wird zuerst der Betrag, den sie als Einer geben, bemerkt, und dann wird die Eins, welche schon in dem obigen Produkte auf der Stelle der Tausend steht, dem Ganzen noch beigesellt. Auf diese Weise ist das Ganze nun

9734
5658
15392

Man sieht hier schon, daß Ein Zig Tausend Statt findet, das, wenn hinwiederum eine neue Zahl hinzukommt, mit dem Zig Tausend verbunden werden muß. Man setze also noch $\frac{8}{7}$ auf die Stelle der Zig Tausend, so werden es, in Verbindung mit diesem Ein Zig Tausend, 16 Zig Tausend, und das Ganze ist

89734
75658
165392

Hier haben wir abermals eine Zahl bekommen, die eine Stelle mehr eingenommen hat, und wir

sind bis zu hundert Tausend vorgerückt. Wollen wir dazu noch eine Zahl fügen, so müssen wir die Eins zuvor mit einrechnen. $\frac{4}{3}$ noch vorgesetzt, so bekommen wir mit dem vorigen die Summe 865392 u. s. f.

Weil bei diesem Verfahren die einfachen Zahlen, sobald sie sich zur collectiven Einheit gebildet haben, auf eine höhere Stelle kommen, so fängt man bei dem Zusammenzählen mit den Einern an, und wenn deren so viel vorhanden sind, daß ihre Summe die Anzahl der Einheiten übersteigt, so schreibt man diejenige Ziffer nur, welche die Einheit bedeutet, unter die Einer; hingegen diejenige, welche die Zig andeutet, auf die Stelle der Zig. Machen die Ziffern hinwiederum mehr als 10 (Zig) aus, so thut man dasselbe. Ueberhaupt ist es nicht nöthig, den Werth der Zahl jedesmal zu nennen, sondern es ist besser und leichter, alle nur als Einer zu behandeln. Man betrachtet dann die übrigen Zahlen als gar nicht vorhanden. Nur so viel hat man zu verdeutlichen, daß diejenigen Zahlen, welche vor einer einfachen stehen, in Beziehung auf die einfache selbst immer als Zig aufzufassen und zu behandeln sind.

Diese Regel gilt nicht blos für die Addition mit Ziffern, sondern auch für jede Rechnungsart. Es können übrigens nicht blos zwei, sondern auch drei, vier und mehrere Zahlen zusammenaddirt werden, die unter einander stehn. Z. E.

356802
437921
368120
534281
1,697,124

Subtraction.

§. 4.

Es kann eine niedere Zahl von einer höhern abgezogen werden. Dies Verfahren nennt man mit einem aus der lateinischen Sprache her entlehnten Ausdruck subtrahiren *).

Abgezogen kann nur eine kleinere Zahl von einer größern werden. Die Subtraction setzt daher zweierlei Zahlen voraus, eine kleinere, welche von einer größern abgezogen wird, oder die abziehende Zahl (Subtrahendus), und eine größere, von welcher die kleinere abgezogen wird, oder die zu vermindernde Zahl (Minuendus). Durch den Abzug erfährt man, wie viel die letzt genannte Zahl größer ist, als die erste, oder welches der Unterschied (die Differenz) zwischen dem Subtrahendus und Minuendus sey.

Regeln:

Die Zahl kann entweder aus einer oder mehrern Ordnungen bestehn. Diese Ordnungen können höher oder niedriger, können aus Einern, Zehnern, Hunderten u. s. w. bestehn.

Ist der Subtrahendus dem Minuendus gleich, so findet zwischen beiden natürlicher Weise kein Unterschied mehr Statt, sondern beide heben sich völlig auf. Dieser Mangel des Unterschiedes wird mit o bezeichnet. So giebt 7 von 7 abgezogen o. Hier sieht man, daß die eine Sieben der andern entgegengesetzt ist, oder eine die andere aufhebt. Dies kann man auch so ausdrücken $+7-7=0$. Dasselbe gilt auch von höhern Zahlenordnungen, sobald sie einander gleich sind. So ist zwischen 700 und 700, zwischen 835 und 835 ebenfalls kein

*) subtrahere heißt abziehn.

Unterschied, und auch hier gilt: $\left.\begin{matrix}+700 & -700\\ 835 & -835\end{matrix}\right) = 0.$

Die allgemeine Regel, daß zwei gleiche entgegengesetzte Zahlen sich einander aufheben, kann man auch durch andere Zeichen, namentlich durch Buchstaben, ausdrücken. Man denkt sich dann unter einem jeden dieser Buchstaben eine unbestimmte Zahl. Nehme man z. B. A, so kann man sich darunter jede größere oder kleinere Zahl denken. Setzt man nun wieder A dazu, so muß man sich natürlich dasselbe darunter denken, was man sich unter dem ersten A dachte; so ist nun $+ A - A = 0 A.$

Es kann aber auch der Minuendus größer seyn, als der Subtrahendus.

Hier ergiebt sich der Unterschied, sobald man diejenige Zahl dem Minuendus entzieht, welcher der Subtrahendus gleich ist. Setze man 8 als Minuendus, und 6 als Subtrahendus, so sieht man, daß die erstere Zahl größer ist, als die letztere, und folglich zwischen beiden ein Unterschied Statt findet. Diese 6, durch welche 8 vermindert werden soll, hebt 6 auf, welche in 8 mit begriffen ist, und es bleibt daher nur noch der Unterschied zwischen beiden Zahlen übrig. Dieser beträgt 2. So ist nun $+ 8 - 6 = 2.$

Wenn man größere Zahlen hat, so zieht man die Zahlen von gleicher Ordnung eben so, wie Einer von Einern, ab; also Hundert von Hunderten, und Tausend von Tausenden u. s. w. So sind $+ 800 - 600 = 200.$ Die Regel für die schriftliche Rechnung ist hier:

Man setzt den Minuendus oben an, den Subtrahendus hingegen darunter, und zwar so, daß alle Zahlen von gleicher Ordnung genau unter einander kommen, und zieht einen jeden einzel-

nen Subtrahendus von dem über ihm sich befindlichen Minuendus ab. Man verfährt bei den höhern Zahlen nicht anders, als bei Einern.

Ein Beispiel mag dies veranschaulichen. Es sey der Minuendus 873459, der Subtrahendus 462342, so schreibt man:

873459
462342
411117

Durch dies Verfahren fand man, wie viel der Minuendus grösser ist, als der Subtrahendus, oder welches der Unterschied zwischen beyden sey.

Der Subtrahendus oder die Zahl, welche von einer grössern abgezogen werden soll, darf nicht grösser seyn, als der Minuendus. Denn nur eine grössere Zahl kann durch eine kleinere vermindert werden. Durch eine grössere wird sie übertroffen, das heißt, mehr als aufgehoben. Dann hört sie aber auch auf Minuendus zu seyn. Sie wird nun die Zahl, welche abgezogen wird. Denn wie kann ich mehr wegnehmen, als vorhanden sind? Wohl aber kann in einer Reihe von Zahlen irgend ein Subtrahendus grösser seyn, als der Minuendus von gleicher Ordnung; in diesem Falle hat man die vorhergehende Zahl des Minuendus zu Hülfe zu nehmen.

Wäre z. E. 9 von 32 abzuziehn, so würde man die 9 Einer unter die 2 Einer schreiben, und von dem ganzen Minuendus abziehen:

32
9
23

Wäre aber 19 von 32 abzuziehn, so würde man eigentlich zuerst ein Zig von drei Zig abziehn, und 22 übrig behalten. Von denen übrig gebliebenen 22 würde man nun 9 abziehn, so, daß dann

13 als Rest blieben. Da dies aber zusammengesetzt und verwickelt ist, so kann man es dadurch sehr vereinfachen, daß man zuerst Einer von Zig abzieht, mithin allezeit die Subtraction von hinten anfängt, und nun von da aus vorgeht.

Ferner: daß man, wenn der Minuendus einer Ordnung weniger ist, als der unter ihm befindliche Subtrahendus, nicht gleich die ganze Zahl der höhern Ordnung, sondern nur einen Zehner zu Hülfe nehme. Man nennt dies Verfahren borgen. In dem obigen Falle borgt man daher von der Dreißig ein Zig, und erhält dadurch, mit den 2 Einern, ein Zig und zwei, oder 12. Davon nimmt man nun die 9 weg, und behält 3 als Rest. Durch dies Hinwegnehmen eines Zigs wird die Dreißig aber ein Zig weniger, mithin nur 2 Zig. Wenn davon ein Zig weggenommen werden soll, so bleibt nur noch ein Zig. So urtheilt und spricht man nun diesem gemäß in obigem Falle also: $\overset{32}{19}$ 9 von 2 läßt sich nicht abziehn; ich borge mir daher ein Zig von den vorherstehenden 30, und dann ist 9 von 12 = 3. Ein Zig von den nach der eben geschehenen Wegnahme des ein Zig noch zurückgebliebenen zwei Zig genommen, ist gleich ein Zig. Es bleiben daher drei Einer und ein Zig, oder dreizehn. Ist die Zahlenreihe länger, so wird in jedem einzelnen Falle auf ebendieselbe Weise verfahren. Zur Erinnerung, daß man schon der vorhergehenden Zahl eins entzogen hat, macht man hinter derselben gewöhnlich einen Punkt:

7.2.0.3.2.1
495683
224638

Hier erreicht, außer der vordersten Zahl, keine einzige des Minuendus diejenige des Subtrahendus; es mußte daher von hinten bis vor fortwährend

geborgt werden. Es tritt auch der Fall ein, daß von der Null geborgt werden muß. An sich ist die Null allerdings bedeutungslos. Aber sie füllt eine Stelle aus, und sobald ihr eine Zahl vorhergeht, so zeigt sie an, daß diese Zig ist. Hat man daher etwas von ihr zu borgen, so wird man sich von einer ihr wiederum vorhergehenden Zahl eine neue Eins, die in Beziehung auf die Null hinwiederum Zig ist, borgen, so bedeutet die Null zehn. Borgt man von dieser Eins, so bleibt 9; daher ist in dem gegebenen Beispiel die 5 von dieser 9 abgezogen. Deutlicher kann man dasselbe an einem kleinern, nur für diesen Fall berechneten Beispiele sehen:

9.000
8
8.992

Hier mußte zu einer jeden Null eine Eins genommen werden, und diese wurde bei der vordersten Zahl erst genommen. Jede Null wurde dadurch zehn. Da aber von jeder Null hinwiederum eins schon zuvor genommen war, so mußte sie nun natürlicher Weise 9, und auch als solche behandelt werden.

Endlich bleibt noch übrig, die Probe zu machen. Um sie zu finden, müssen wir auf Folgendes achten. Der Subtrahendus ist um so viel kleiner als der Minuendus, als man unter dem Striche Zahlen erhalten hat; und mithin ist die unter dem Striche befindliche Zahl der Unterschied, welcher zwischen dem Minuendus und Subtrahendus statt findet. Wenn daher richtig gerechnet ist, so muß der Minuendus wiederum herauskommen, sobald der Subtrahendus mit dem Reste, das ist mit der herausgekommenen, unter dem Striche befindlichen Zahl wieder zusammenaddirt wird.

) 240 (

z. B. 8

5

3

Addire man den Subtrahendus 5 mit dem Rest 3, so wird man 8, das ist den Minuendus, bekommen:

8

5

3

8

Versuchen wir dies mit dem vorigen Beispiele:

9000

2

8998

9000

so finden wir auch hier dasselbe bestätigt.

Multiplication.

§. 5.

Eine Zahl kann durch eine andere so viel mal vermehrt werden, als diese vermehrende Zahl selbst Einheiten in sich enthält. Diese Verfahrungsart nennt man Multiplication. Diejenige Zahl, welche vermehrt wird, heißt Multiplicandus; diejenige, welche den Multiplicandus vermehrt, heißt Multiplicator; und die Zahl, welche sich als Folge dieses Verfahrens ergiebt, heißt das Product; und der gemeinschaftliche Name aller Zahlen, die sich multipliciren lassen, ist Factoren. So sind also 4 × 8 Factoren von 32, und von diesen Factoren ist 4 Multiplicator, 8 Multiplicandus, und 32 das Product beider Factoren = 32.

Dem Wesentlichen nach ist Multiplication von Addition nicht verschieden, sondern nur eine Verkürzung derselben. Setzt man 8 vier mal unter einander, und zählt alles zusammen, so bekommt man dasselbe Product.

Die Producte aller Zahlen von eins bis zehn sind schon oben S. 20 fg. angeführt worden. Es ist nöthig, daß man sie genau und auswendig wisse, ehe man weiter schreite *).

*) Man hat sie, zur bessern Uebersicht, auf folgende Tafel vorgestellt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

So wie man bei der Addition und Subtraction alle Zahlen höherer Ordnung eben so behandelte, als die Zahlen der niedern, so geht es auch der Multiplication. Man multiplicirt zuerst die Einer, dann die Zehner, Hunderte u. s. f. Man setzt den Multiplicator unter diejenige Zahl des Multiplicandus, unter welche er, seiner Ordnung nach, gehört, also zu Einern, wenn er dahin gehört, zu Zig, wenn ihm die Stelle der Zig gebührt u. s. f.

Eben so schreibt man auch die Zahlen der Producte in derselben Ordnung unter einander. Wenn nun durch die Multiplication derjenigen Zahlen, die zu einer niedern Ordnung gehören, Zahlen höherer Ordnung entstehn, so behält man die letztere im Sinne, und addirt sie zu den in die Reihe der höhern Ordnung. Z. B.

8643
6
51858

Hier multiplicirt man zuerst die Einer: $6 \times 3 = 18$. Weil nur das ein Zig und 8 ist, so muß man das Zig unter die Stelle der Zig schreiben, und das Ganze wird dann, wie folgt, aussehn:

8643
6
18
24
36
48
51858

Um den Raum und das viele Schreiben zu ersparen, addirt man daher jede höhere Zahl gleich

Dies wäre sehr zweckmäßig, sobald man nur dadurch nicht die eigene Thätigkeit des Schülers lähmte, daß man ihm vor die Augen legt, was im Kopfe seyn soll.

zu der schon vorhandenen höhern, wie es oben geschehen ist.

Es kann aber auch der Multiplicator aus mehrern Zahlen bestehen. In diesem Falle setzt man die zu gleicher Ordnung gehörenden Zahlen unter einander, und verfährt eben so, als mit Einern.

Denke man sich den Multiplicandus 87, und den Multiplicator 32, so sieht man, daß man den Multiplicandus sowohl mit den Einern, als den Zig, zu multipliciren hat. Man wird demnach erst 2 × 7 und 2 × 80 zu nehmen haben; dann 30 × 7 und 30 × 80. Um dies nicht so sehr zu vereinzeln, so behandelt man lieber die Zig wie Einer, und schreibt sie blos auf eine höhere Stelle.

Also:

87
32

174
261

2784

Ein anderes Beispiel:

49789
47

348523
199156

2340083

Nach ebenderselben Regel verfährt man, wenn der Multiplicator aus 100 und 1000 besteht. Davon nur ein Beispiel:

87432
564

349728
524592
437160

49311648

87432
3564

349728
524592
437160
262296

311607648

Wenn der Multiplicator blos 300, oder überhaupt blos eine Ordnung von Zahlen hat, so giebt es noch ein Verkürzungsmittel der Multiplication. Es leuchtet nämlich ein, daß alle Zahlen, welche durch Multiplication irgend eines Multiplicators entstehen, derjenigen Zahlenordnung angehören, aus welcher der Multiplicator selbst genommen ist, so ist $3 \times 3 = 9$; $30 \times 3 = 90$; $300 \times 3 = 900$ u. s. f. Wenn man daher bei der Multiplication einer grössern Zahl die Nullen, wodurch die Mehrheit der Stellen gleich angedeutet wird, hinten der Zahl beifügt, so braucht es dann nur einer Multiplication mit einer einfachen Zahl. Als Beispiel mag hier folgendes gelten:

statt	setze man
87536	87536
300	300
00000	26260800
00000	
262608	
26260800	

Daß dies auf alle auch noch so zusammengesetzte Fälle angewendet werden kann, versteht sich von selbst, und bedarf hier weiter keiner Erörterung.

Division.

§. 6.

Eine Zahl dividiren, heißt: irgend einen Theil derselben suchen; oder auch: bestimmen, wie viel mal eine kleinere Zahl in einer grossern enthalten sey. Diejenige Zahl, welche getheilt werden soll, heißt der Dividendus, und diejenige, welche anzeigt, in wie viel Theile sie zerlegt werden soll, heißt Divisor; der gefundene Theil ist der Quotient. Gesetzt, es wäre die Frage: wie viel mal 2 in 10 enthalten sey, so würde sich 5 als das gefundene Resultat ergeben. In diesem Falle ist 2 der Divisor, 10 der Dividend, und 5 der Quotient.

Da wir schon voraussehen dürfen, daß durch die in der ersten Abtheilung vorgekommenen Uebungen von kleinern Zahlen ein jeder Theil gefunden werden kann, so darf hier nur davon geredet werden, wie man mit grössern, nicht auf einmal aufzufassenden Zahlen verfahren müsse.

Aus der Zahlenordnung ist es bekannt, daß in einer jeden Zahlordnung die vorderste Stelle in Beziehung auf die zweite als Zig, in Beziehung auf die dritte als 100, in Beziehung auf die vierte als 1000 u. s. f. aufzufassen sey. Will man also eine zusammengesetzte Zahl theilen, so hat man nichts anders zu thun, als jede Zahl für sich zu behandeln, der gefundene aliquote Theil, oder der Quotient, wird nun natürlich zu derjenigen Ordnung gehören, von welcher er als Einheit anzusehen ist.

So wird ein Halb von 666 seyn 333; ein Drittel 222 u. s. f. Eben so wird $\frac{1}{2}$ von

$$\frac{1}{2} \left| \frac{8642}{4321} \right| 1$$

hiervon also die Hälfte von jeder einzelnen Zahl genommen.

Etwas zusammengesetzter wird aber das Verfahren, wenn die Zahlen des Dividendus ungleich sind, so, daß also ein Rest übrig bleiben muß. Hier wird eben so wenig anders verfahren, als vorher. Natürlich sind aber die aliquoten Theile der vordersten Stelle allezeit als Zehner der nächstfolgenden zu behandeln. Wenn also hier $\frac{1}{2}$ übrig bleibt, so ist dies ein Halb der höhern Ordnung, und muß allezeit in Einer der nächstfolgenden Zahl aufgelöst werden:

$$\frac{1}{2} \mid \begin{matrix} 5 & 9 & 3 & 7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \mid 2413$$

Nun bleibt nur noch übrig, die Halben, welche bei einer jeden Zahl geblieben sind, aufzulösen. Eigentlich sind es auf der ersten Stelle $\frac{1}{2}$ Tausend, auf der zweiten $\frac{1}{2}$ Hundert, auf der dritten $\frac{1}{2}$ Zig, auf der vierten $\frac{1}{2}$ Einer. Ein halb Tausend ist 500, ein halb Hundert ist 50, ein halb Zig ist 5. Sonach haben wir nun $555\frac{1}{2}$, welche noch dem obigen Quotienten beizufügen sind:

$$\begin{array}{r} 2413 \\ 555\frac{1}{2} \\ \hline 2968\frac{1}{2} \end{array}$$

Es ist nicht nöthig, daß man immer die Zahlenordnung berücksichtige. Man darf nur die nächstfolgende Zahl in Beziehung auf die ihr zunächst vorhergehende auffassen, so haben die übriggebliebenen Theile immer nur die Bedeutung des Zigs. So war hier das Halb der ersten Stelle $\frac{1}{2}$ Zig, der zweiten also 5, und die zweite Stelle hinwiederum ein halb Zig der dritten u. s. f.

Es wird nicht überflüssig seyn, einige Beispiele zusammen zu stellen, damit durch Uebung die Sache anschaulicher werde:

) 247 (

$\frac{1}{2}$	19	3	4	6	7	91233
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	5500
	5	5	0	0		$96733\frac{1}{2}$

Man sieht, daß sich unter dem Dividendus die noch übrig gebliebenen Theile aufgelöset finden, die dann natürlich dem schon gefundenen Quotienten beigefügt sind.

$\frac{1}{2}$	7	4	5	9	6	32243
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		5055
	5	0	5	5		37298

$\frac{1}{3}$	5	6	7	8	9	12223 $\frac{2}{3}$
	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	6706
	6	7	0	$6\frac{2}{3}$		18929

Gehen wir dieses Beispiel durch, so enthielt es auf der ersten Stelle $\frac{2}{3}$, das waren $\frac{2}{3}$ Zig in Beziehung auf die zweite, $\frac{2}{3}$ Zig sind aber $6\frac{2}{3}$. Diese $\frac{2}{3}$ sind hinwiederum $\frac{2}{3}$ Zig in Beziehung auf die dritte Stelle, oder $6\frac{2}{3}$. Da sich nun hier oben schon $\frac{1}{3}$ befindet, so sind es $6\frac{3}{3}$. $\frac{3}{3}$ sind aber ein Ganzes, mithin ist der Quotient dieser Stelle $6 + 1 = 7$. Die dritte Stelle blieb ohne Rest, und man kann daher dem zur vierten Stelle gehörigen Quotienten nichts beifügen. Wohl aber bleiben von der vierten Stelle $\frac{2}{3}$ übrig zur fünften, und diese werden von der fünften hinwiederum $6\frac{2}{3}$.

$\frac{1}{3}$	8	5	7	9	3	21231 $\frac{2}{3}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	7366
	7	3	6	6		28597
		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		

$\frac{1}{3}$	29	7	8	2	5	6	922012
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	70740
	7	0	7	4	0		992752
			$\frac{1}{3}$				

Wird der Theiler (Divisor) grösser, so kann man in der Theilung gleich zwei Zahlen zusammenfassen.

$\frac{1}{4}$	33	97	65	82416 $\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		2525
		25	25	84941

Man sieht, daß das Viertel der ersten beiden Zahlen $\frac{1}{4}$ Zig von der ersten Stelle der zweiten Abtheilung, aber ein Viertel Hundert von der dritten Zahl sey, und von beiden daher $\frac{1}{4}$ Hundert betragen müsse.

$\frac{1}{5}$	37	89	12	71702 $\frac{2}{5}$
	2	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	4080
		4		75782

Der Quotient muß natürlich so viel Classen haben, als der Dividend, und jede Classe muß hinwiederum eben so viele Stellen haben, nur mit Ausnahme der ersten. Die erste Stelle der letzten Classe mußte daher mit einer Null ausgefüllt werden.

$\frac{1}{5}$	32	76	59	46	6,15,11,09 $\frac{1}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$		40 20 80
		40	20	80	6 55 31 89

$\frac{1}{6}$	54	23	72	9,03,12 $\frac{4}{6}$
		$\frac{5}{6}$		86
			86	9 03 98

Es sind hier nur Beispiele gegeben, wie sich die Resultate richtig finden müssen, wenn man nach der oben angeführten Regel verfährt. Es giebt aber einen kürzeren Weg, die Division zu bewerkstelligen, an den man sich lieber halten wird, sobald das obige zur Einsicht gebracht ist *).

*) Es ist aber durchaus nothwendig, daß der Schüler dies erst lerne auf dem vorgezeichneten Wege einsehen, sonst möchte ihm in dem folgenden leicht manches mechanisch werden.

Wir halten uns an das, was schon oben bemerkt ist, nämlich, daß jeder übriggebliebene Theil in Beziehung auf die nächstfolgende Stelle als höhere Einheit aufzufassen sey.

Beispiel: $\frac{1}{6}$ | 7997 |

Hier ist zuerst ein Sechstel von 7 ist eins und $\frac{1}{6}$. Dies ist ein Sechstel Zig, das sind zehn Sechstel der nächstfolgenden Stelle; da nun diese hier 9 Einer hat, so wird dies nun gleich 10+9 oder 19 seyn, das sind $3\frac{1}{6}$; stehet

$\frac{1}{6}$	7	9	9	13
	1	1		
	ø		ø	

Bei der dritten Stelle findet dasselbe Statt. Es ist daher wiederum ein Sechstel von 19 zu nehmen, das ist $3\frac{1}{6}$; stehet

$\frac{1}{6}$	7	9	9	7
	1	1	1	
		ø ø		ø

Auf der vierten Stelle finden wir 7, daher $\frac{1}{7}$, das ist $2\frac{5}{6}$. Der Quotient von 7997 ist demnach $1332\frac{5}{6}$.

Noch ein Beispiel:

$\frac{1}{7}$	58	9	7	6	5	$8425 2\frac{1}{7}$
	2	1	3	1	1	

Man spricht hier also nicht, wie man sonst gewohnt ist; 7 in 58 habe ich 8 mal u. s. w., sondern $\frac{1}{7}$ von 58 ist 8 und $\frac{2}{7}$. Das Siebentel dieser Stelle ist $\frac{20}{7}$ der nächstfolgenden; diese, mit den $\frac{2}{7}$, machen $\frac{29}{7}$, das sind $4\frac{3}{7}$. Die $\frac{3}{7}$ sind von der nächsten Stelle $\frac{30}{7}$. Da nun diese Stelle schon $\frac{5}{7}$ hatte, so sind es $\frac{35}{7}$, das sind $5\frac{1}{7}$. Dieses Siebentel ist $\frac{1}{7}$ der letzten Stelle, und macht mit der 5 $\frac{1}{7}$, das sind $2\frac{1}{7}$.

Eben so mit Achteln:

$\frac{1}{8}$	9	8	7	6	5	4	1234565/8
	1	2	3	4	5		

Auflösung:

$\frac{1}{8}$ v. 9 = 1 + $\frac{1}{8}$ = 2 + $\frac{2}{8}$ = 3 + $\frac{3}{8}$ = 4 + $\frac{4}{8}$ = 5 + $\frac{5}{8}$ = $6\frac{6}{8}$ *).

$\frac{1}{9}$	75	6	4	8	2	84053 5/9
	3	0	4	3	5	

Auflösung:

$\frac{75}{9}$ = 8 + $\frac{36}{9}$ = 4. $\frac{45}{9}$ = 0 $\frac{48}{9}$ = 5 + $\frac{32}{9}$ = $3\frac{5}{9}$.

Man darf nun nur die Ganzen zusammenzählen, um den Quotienten zu erhalten.

Da man durch die Division irgend einen aliquoten Theil gefunden hat, so ist die Probe, ob es der richtige sey, leicht zu machen. Denn man darf nur den Quotienten so viel vermehren, als er selbst Theil des Ganzen ist. Wenn ich z. B. den sechsten Theil irgend eines Ganzen sechs mal nehme, so muß ich natürlich hinwiederum das Ganze erhalten. Dasselbe gilt auch von andern Beispielen.

Die Regel für die Probe ist demnach:

Man multiplicire den Quotienten mit dem Divisor, und sehe dann, ob das Product gleich ist dem Dividendus.

Ist dies der Fall, so ist das Verfahren recht.

In dem obigen Beispiele würde man also den Quotienten $84053\frac{5}{9}$ neun mal nehmen müssen, weil er eben der neunte Theil ist.

Das Verfahren ist folgendes:

$$\begin{array}{r} 84053\ \frac{5}{9} \\ \cdot\ \ 9 \\ \hline 756482 \end{array}$$

*) Man sieht, daß hier dieselbe Uebung, nur abgekürzt, erscheint

Man sieht, daß die übriggebliebenen $\frac{5}{9}$ wieder zu dem Producte addirt sind; das muß ebenfalls geschehn, weil diese mit zu dem neunten Theile gehören, und folglich auch mit eingerechnet werden müssen. $9 \times \frac{5}{9} = \frac{45}{9}$, das sind 5 Ganze. Es ist nöthig, den Bruch erst zu multipliciren, weil dies natürlich mit dem Dividend geschehen, und folglich allemal eben so viel Ganze geben muß, als Theile vorhanden sind.

Wenn aber mehrere aliquote Theile eines Ganzen, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{7}$ und dergleichen, erfordert werden, so muß man entweder den jedesmaligen Quotienten, oder erst zuletzt den ganzen Quotienten so viel mal nehmen, als der Divisor erfordert. Das letztere ist ohne Zweifel das zuverlässigste und sicherste.

Es sey z. B. die Aufgabe:

$\frac{3}{7}$	7	8	3	4	2	5	111917 $\frac{5}{7}$
		1	6	1	5	6	7
							783425

Die Probe beweist, daß der Quotient richtig der siebente Theil des Ganzen sey. Da aber $\frac{3}{7}$ gesucht werden sollten, so muß dieser Quotient noch 3 mal genommen werden. Es enthält aber der Quotient, außer den ganzen Zahlen, hier noch $\frac{6}{7}$; diese müssen zuvor 3 mal genommen werden; dadurch erhält man $\frac{18}{7}$, das sind $2\frac{4}{7}$; diese kommen natürlich noch zu dem Quotienten. Die dreimalige Wiederholung des Quotienten giebt also:

111917

3

335753 *) $\frac{4}{7}$

Will man hierauf die Probe machen, so kann man dies auf zweierlei Weise; entweder man kann

*) Die zwei Ganze, welche durch die Multiplication der $\frac{4}{7}$ entstanden waren, müssen mit eingerechnet werden.

die drei Siebentel wiederum durch Division in ein Siebentel verwandeln, wo dann der oben gefundene Quotient sich wiederfinden würde; oder man kann durch Wiederholung der $\frac{3}{7}$ den obigen Dividend suchen. Im ersten Falle sucht man, da drei Siebentel vorhanden sind, den dritten Theil von dem dreifach genommenen Quotienten. Also:

$\frac{4}{7}$	3	3	$\frac{5}{2}$	7	$\frac{5}{2}$	$3\frac{4}{7}$	$111917\frac{2}{3}$

Es bleibt noch übrig $\frac{1}{7}$ von $\frac{4}{7}$ zu nehmen, das ist $\frac{4}{21}$, oder $\frac{4}{21}$. $\frac{2}{3}$ sind $\frac{14}{21}$; dies mit $\frac{4}{21}$ zusammen, macht $\frac{18}{21}$, das sind $\frac{6}{7}$.

Auf die andere Weise ist hier der Quotient $\frac{3}{7}$. Da das Ganze $\frac{7}{7}$ seyn soll, so muß der Quotient so viel mal genommen werden, daß aus den $\frac{3}{7}$ $\frac{7}{7}$ werden, das ist also 2 und $\frac{1}{3}$ mal. Also 2 mal:

$$\frac{335753}{671506}\ ^{2} = \text{und } 2 \times \tfrac{4}{7} = 1\tfrac{1}{7}.$$

$\frac{1}{3}$ | 335753 | $111917\frac{2}{3}$. $\frac{1}{3} \times 4 = 1\frac{5}{7}$.

Sonach haben wir folgende Zahlen:

671506	
1	$\frac{1}{7}$
111917	$\frac{6}{7}$
783425	(1)

Anstatt daß hier der Quotient 3 mal genommen wurde, kann man auch den Dividend so viel mal vermehren, und dann von dem Producte, oder dreifach vermehrten Dividend, den siebenten Theil suchen, den man natürlich durch Division finden wird.

Der Dividend war 783425. Der Divisor betrug $\frac{3}{7}$. Nach der eben gegebenen Regel muß man zuerst den Dividend mit 3 multipliciren.

Also: 783425
3
2350275

Jetzt muß der siebente Theil von dem dreifach vermehrten Dividend genommen werden. Also:

4/7	2	3	5	0	2	7	5	335753 4/7
					3	2	4	

Man sieht, daß der Quotient mit dem vorhergehenden genau übereinstimmt. Die Probe ist nicht anders, als vorher.

Noch ein Beispiel derselben Art.

Erste Art:

5/8	73	2	9	2	4	91615 4/8
	1	4	1	4		5
						458077 20/8 = 2 4/8

Zweite Art des Verfahrens:

732924
5

4/8	36	64	62	20		458077 4/8
		60	66	44		

Bei der letzten Verfahrungsart ist die Probe ganz so, wie bei einem jeden einfachen Dividiren.

Wenn wir alles, was wir bisher gehabt haben, in Regeln zusammenfassen, so werden wir für die Division folgende allgemeine Regeln festsetzen können.

Wenn der Dividendus eine grössere Zahl ist, als daß man sie übersehen kann, so theile man denselben von vorn bis hinten ein, und behandele jede einzelne Zahl für sich so, als wenn sie auf der Stelle der Einer stünde. Diese Einer sind aber allezeit Zig in so fern sie mit den Zahlen nächstfolgender Stellen in Beziehung gesetzt werden.

Wenn bei einer Zahl Theile übrig geblieben sind, so schreibe man diese unter diejenige Zahl des Dividendus, von welcher sie übrig bleiben. Diese haben in Beziehung auf die nächstfolgende Stelle die Bedeutung des Zig. Was also auf der ersten Stelle $\frac{1}{8}$ war, das ist in Beziehung auf die zweite Stelle $\frac{10}{8}$. Nimmt man dazu noch die Zahl, welche auf der zweiten Stelle steht, so hat man dadurch die aliquoten Theile, welche die zweite Zahl des Quotienten ausmachen.

Will man die Probe machen, so muß man den Quotienten mit dem Dividendus multipliciren; der Grund ist oben angedeutet.

Sind mehrere aliquote gleiche Theile zu suchen, so dividirt man entweder zuerst mit einem, und multiplicirt dann mit derjenigen Zahl, welche anzeigt, wie viel mal der Divisor genommen werden soll; oder man multiplicirt gleich mit der eben genannten Zahl den Dividendus, und dividirt dann mit dem einfachen Divisor.

Es bleibt für die Division noch übrig, daß man auch mit größeren Zahlen zu verfahren wisse.

So wie man oben den Dividend immer als Einheit behandelte, so macht man es hier auch mit dem Divisor. Man vergleicht nämlich nur zuerst die vorderste Zahl des Divisors mit der ersten Zahl des Dividend; die ungefähre Ansicht giebt es schon, wie viel mal der Dividend den Divisor enthalte.

Natürlich kann auch hier nicht jeder Dividend den Divisor gerade ganz vollkommen enthalten, ohne daß ein Rest übrig bliebe. Diesen Rest erfährt man am schnellsten, indem man den Divisor durch den jedesmaligen Quotienten multiplicirt; dadurch ergiebt sich die Zahl, in welcher er gerade ganz enthalten ist. So viel als nun der jedesma-

lige Dividend die durch dieses Verfahren gefundene Zahl übersteigt, so viel bleibt nun als Rest übrig. Der Rest darf natürlich nicht die Größe des Quotienten erreichen, denn sonst würde derselbe ein mal mehr darin enthalten seyn. In Beziehung der nächstfolgenden Stelle bekommt aber dieser Rest wiederum, wie oben, die Bedeutung einer Stelle mehr. Die Einer empfangen die Bedeutung der Zehner, die Zehner der Hunderte u. s. f. Man setzt zu diesen Zahlen, welche noch übrig geblieben sind, nun noch die folgende Zahl des Dividend, und empfängt dadurch den zweiten Dividend, mit dem man eben so verfährt, als mit dem ersten.

Einige Beispiele mögen dies veranschaulichen:

24	37	0	2		9876
	51	8	4		
	~~75~~	4	~~7~~		
	~~7~~	~~7~~			

34	78	6	9	5	4	23145 ~~24~~ 34
	~~70~~	4	5	9		34
	~~7~~	~~7~~	3	4		92584
			~~7~~	2		69437
						786954

Es ist keine Verschiedenheit des Verfahrens nöthig, wenn auch der Divisor bis zu Hunderten und Tausenden anwächst.

358	873	0	4	2	2438 ~~238~~
	277	8	0	8	
	~~750~~	3	0		
	33	1	3		
	~~75~~	7			
	~~3~~	3			
		2			

288	765	0	0	3	2			26562 $\frac{179}{288}$
	309	2	0	5	6			
	281	8	2	9				
	766	6	7	7				
	22	7	3					
	77		1					

976	2322	6	9	8	0	4	6	7	6	2379813572 $\frac{44}{976}$
	580	8	7	4	2	8	8	8	4	
	379	9	4	8	5	7	3	4		
	707	5	9	3	4	5	0			
	74	4	7	4	7	0	7			
	79	8	7	3	5	7	2			
	7	7			7					

3982	29803	0	2	5	5	4	4	7485693
	8544	2	6	5	3	6		
	2932	8	5	7	1			
	7771	6	1	6	9			
	349	1	6	5	7			
	702	7	9	8				
	27	9	7	7				
	3	4		7				
	7	3						

Anmerk. Für die Uebersicht des Ganzen ist es nebenhin auch ein großer Vortheil, daß man hier nicht nöthig hat Zahlen auszustreichen. Die untersten oder letzten Zahlen, welche nach der Operation übrig bleiben, machen allezeit den jedesmaligen Dividend aus. Man streicht daher nur diejenigen Ziffern aus, welche eine Verwirrung machen könnten. Uebrigens ist es gleich viel, ob man bei der Multiplication des Quotienten mit dem Dividend von hinten oder von vorn anfängt. Bei der hier durchgeführten Verfahrungsart wird man wenigstens nicht leicht Gefahr laufen, zu irren, wenn man mit der vordersten Zahl anfängt. Auch entdeckt man auf diese Weise schneller, ob der Quotient richtig

ge-

genommen sey? Die Uebung, welche vorausgesetzt wird, um mit diesen grössern Zahlen umzugehen, hat den Schüler schon zu einem ungefähren richtigen Massstabe gewöhnt, so daß nicht leicht Fehlgriffe geschehen können; besonders, wenn bei dem jedesmaligen Operiren der ganze Divisor, und nicht blos ein einzelner Theil desselben ins Auge gefaßt wird.

So wie man von irgend einer Zahl mehrere aliquote einfache Theile nehmen kann, so kann man auch mehrere aliquote zusammengesetzte Theile von einem Dividend suchen. Man kann also auch anstatt $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{34}$, $\frac{1}{288}$ u. s. f. $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{34}$, $\frac{1}{288}$ und mehr oder weniger solcher Theile aufzusuchen haben. Man verfährt in diesem Falle nicht anders, als bei einfachen Zahlen. Man vermehrt dann nämlich entweder den Quotienten so viel mal, als die Summe der Theile es erheischt, oder man hält sich sogleich an den Dividend, je nachdem eins oder das andere mit grösserer Schnelligkeit vollbracht werden kann. Um den Raum zu sparen, wählen wir zu diesen Uebungen sogleich die schon vorhanden gewesenen Beispiele *).

Es mögen also $\frac{15}{24}$ von 237024 gesucht werden. Die Division hat oben schon gezeigt, daß der Quotient 9876 ist. Dieser darf also nur 15 mal genommen, oder mit 15 multiplicirt werden:

$$\begin{array}{r} 9876 \\ 15 \\ \hline 49380 \\ 9876 \\ \hline 148140 \end{array}$$

*) Man merke sich zugleich als eine pädagogische Regel, daß man nicht die Menge von Beispielen zu häufen suche, sondern vielmehr eine einzige Zahl in mannigfaltigen Zusammenstellungen und Veränderungen auffasse. Man kommt dadurch dem Geiste des Menschen zu Hülfe, und bringt das allgemeine Schema, nach dem sich der Mensch richtet, zur grössern Klarheit. Man verändere z. B. nur eine Zahl des Divisors,

Die zweite Verfahrungsart wird dasselbe Resultat geben:

237024
15

1185120

237024

1/24	35	5	5	3	6	.	148140
	~~1~~	9	~~3~~	~~9~~			
	3	~~3~~					
	~~1~~						

In Fällen, wo der Quotient ohne Bruch rein herausgekommen ist, ist es allezeit kürzer, man vermehrt sogleich den Quotienten; so wie es hinwiederum im entgegengesetzten Falle oft schneller geht, wenn man sogleich den Dividend der Aufgabe gemäß multiplicirt.

Im zweiten Beispiele beträgt $\frac{1}{3}\frac{5}{4}$ von 786954 die Summe $23145\frac{2}{3}\frac{4}{4}$ oder $\frac{1}{1}\frac{2}{7}$. Sollen nun $\frac{1}{3}\frac{5}{4}$ genommen werden, so muß natürlich der ganze Quotient 15 mal genommen werden. Man multiplicirt also mit der 15 zuerst die $\frac{2}{3}\frac{4}{4}$ oder $\frac{1}{1}\frac{2}{7}$, weil diese nachher mit in die Reihe der Ganzen eingerechnet werden müssen. $15 \times \frac{1}{1}\frac{2}{7} = \frac{1}{1}\frac{8}{7}\frac{0}{7}$, das sind 10 Ganze $\frac{1}{1}\frac{0}{7}$. 15×23145 oder

23145
15

115735*)
23145

$347185\frac{10}{17}$

oder man weise ihr nur eine andere Stelle an; oder auch umgekehrt, man stelle die Zahlen, welche den Dividend ausmachen, anders, oder verändere nur eine oder wenige Ziffern. Schon hier ist eine unendliche Mannigfaltigkeit möglich.

*) Die durch die Vermehrung des Bruches $\frac{1}{1}\frac{2}{7}$ entstandenen Ganzen müssen natürlich hier mit eingerechnet werden.

Zweite Verfahrungsart:

786954
15

3934770
786954

34	✗18	0	4	3	1	0	$347185\frac{20}{34}$ oder $\frac{10}{17}$
	26	4	6	9	9	0	
	✗4	✗3	3	5	4		
	7		7	✗2			

Eben so wollen wir auch $\frac{15}{976}$ von 292900132 suchen. Da $\frac{1}{976}$ gleich ist der Zahl $300102\frac{580}{976}$, so würden $\frac{15}{976}$ seyn $15 \times 580 = \frac{8700}{976}$, das sind

15

2900
580

8700

976	8700	$8\frac{892}{976}$ und 15×300102
	1542	15
	99	---
	8	1500510
		300102

		4501530. Dazu noch

$8\frac{892}{976} = 4501538\frac{892}{976}$.

Daß zuerst die Theile, und dann die Ganzen multiplicirt wurden, geschah deswegen, weil man dann die dadurch entstandenen Theile gleich zu der ganzen Summe zählen konnte. Da die Anzahl der Neun Hundert und Siebenzigstel so sehr stieg, daß man ohne Division nicht genau wissen konnte, wie viel sie Ganze ausmachen, so mußte dies erst dadurch erfahren werden.

Die zweite Art der Auflösung mag auch in diesem Beispiele Statt finden.

) 260 (

2929001 32
15

14645006 60
2929001 32

976 1/976	4393	5	0	1	9	8	0	4501538 793/976
	719	5	3	5	9	0	2	
	584	6	2	0	8	4		
	437	5	7	7	7	9		
			4	0	5			
			3	8	9			
			1	1	8			

Damit aber auch hier noch die Aufgabe vergrößert werde, so setzen wir anstatt der $\frac{15}{976}$ gleich $\frac{793}{976}$, die von ebendemselben Dividend gesucht werden sollen. Um dies auf dem ersten Wege zunächst auszumitteln, setzen wir gleich den einfachen Quotienten als schon gefunden voraus. Er war $300102\frac{580}{976}$. Wir müssen zuerst den Bruch $\frac{580}{976}$ 793 mal nehmen. Also:

580
793

1740
5220
4060

459940

Dies Product sind Neun-hundert-und-sechs-und-siebenzigstel; diese müssen durch die Division zu Ganzen gemacht werden. Also:

976	4599	4	0
	915	2	4
	796	5	
	862	4	
	73		
	2		

471 $\frac{244}{976}$

Jetzt sind noch die Ganzen zu multipliciren:

300102
793

900306
2700918
2100714

237980886
471 $\frac{2}{5}\frac{4}{7}\frac{4}{8}$

237981357

Die zweite Verfahrungsart wird zu demselben Resultate führen.

292900132
793

878700396
2636101188
2050300924

232269804676

976	2322	6	9	8	0	4	6	7	6	237981254 $\frac{7}{5}\frac{7}{7}\frac{2}{8}$
	580	8	7	3	2	8	4	7	2	
	379	9	4	7	5	4	9	9		
	707	5	9	2	4	3	6	7		
	74	4	7	3	6	8	0			
	79	8	7	2	5	4	7			
	7	7				7				

Leichter und einfacher wird die Operation bei dem letzten Beispiele seyn, weil hier kein Bruch am Ende bleibt. Wir wollen annehmen, es seyen $\frac{8}{3}\frac{9}{9}\frac{7}{8}\frac{2}{2}$ von 29808025544. Da die obige Auflösung zeigt, daß der Quotient 7485692 ist, so darf dieser nur 897 mal genommen werden, um das ganze Product zu erhalten.

Man hat nur besonders darauf zu achten, daß bei der Vermehrung der Brüche, und ihrer Erhe-

bung zu Ganzen, kein Fehler gemacht werde. Es ist deshalb fast unerläßlich, daß man diese Uebungen auch abgesondert behandelt; daß man also einen gegebenen Bruch vermehren, und nachher die Ganzen suchen läßt, die daraus entstanden sind. Einige solcher Uebungen mögen als Beispiel stehen.

Erste Aufgabe:

Es sollen $\frac{21}{32}$ achtzehn mal genommen werden; wie viel betragen sie Ganze?

Auflösung:

Da die $\frac{21}{32}$ vermehrt werden sollen, so ist die Zahl 21 als Multiplicandus, die Zahl 18 hingegen als Multiplicator anzusehen. 18×21 ist 378.

Oder: 21
18
168
21
378

Da es aber keine Ganzen, sondern nur Zwei- und-dreißigstel waren, die hier vermehrt wurden, so sind auch die 378 nur Zwei- und-dreißigstel. Es ist daher zu suchen, wie viel diese Ganze ausmachen. Dies kann man bald durch Division finden:

32	378	$11\frac{26}{32}$ oder $\frac{13}{16}$.
	56	
	2	

Dies wäre das Product, das sich aus dieser Multiplication ergeben muß. Es ist also $18 \times \frac{21}{32}$ gleich $11\frac{13}{16}$ *).

*) Freilich gehört gerade diese Aufgabe zu denjenigen, die sich ohne alle Mühe besser aus dem Kopfe auflösen läßt. Denn man darf nur so verfahren; $18 \times \frac{21}{32}$ sind $\frac{21}{32} \times 18$ oder $\frac{378}{32}$, das sind $\frac{9}{16} \times 21$ oder $\frac{21}{16} \times 9$. 21 ist $1 + \frac{5}{16} \times 16$;

Zweite Aufgabe:

Es sollen $\frac{65}{77}$ 77 mal genommen werden; wie viel sind es Ganze?

Auflösung:

Die $\frac{65}{77}$ müssen durch die Zahl 77 vermehrt oder multiplicirt werden, um dadurch die Summe der Theile zu erfahren; diese Theile müssen dann dividirt werden, um zu erfahren, wie viel sie Ganze machen: 65 oder 77. '$\frac{385}{77}$' sind 97

500	5	$51\frac{58}{77}$.
55	8	
76		
5		

77 · 65 = 385 + 462 = 5005

Dritte Aufgabe:

Es sollen $\frac{385}{597}$ 236 mal genommen werden; wie viel Ganze betragen sie?

Auflösung:

236 × 385, das ist 385; also '$\frac{385}{597}$'. Diese

236 · 385 = 2310 + 1155 + 13860

1386	0	$23\frac{120}{597}$. Es sind demnach
202	9	
195		
42		
1		

zu Ganzen: 597

nach $236 \times \frac{385}{597} = 23\frac{129}{597}$.

folglich auch $1 + \frac{5}{17} \times 9$. $\frac{5}{17} \times 9 = 5 \times 9 = \frac{45}{17}$, das sind $2 + \frac{13}{17}$; diese zu 9, geben $11\frac{12}{17}$. Die durch die rein combinatorischen Uebungen gebildeten Schüler halten sich natürlich lieber an diese einfachere und zugleich natürliche Auflösung.

Vierte Aufgabe:

$\frac{6379}{7932}$ sollen 5759 mal genommen werden; wie viel sind es Ganze?

Auflösung:

6379
5759
57411
31895
44653
31895
36736661

Diese $\frac{36736661}{7932}$ müssen durch Division zu Ganzen gemacht werden:

7932	36736	6	6	1	$4631\frac{2569}{7932}$
	8118	4	0	9	
	5000	5	7		
	869	6	6		
	252	5			
	41				
	33				
	8				

Es sind also $5759 \times \frac{6379}{7932} = 4631\frac{2569}{7932}$.

Vortheile bei der Division.

1) Wenn der Dividendus und der Divisor nur durch die Mehrheit der Stellen, mithin nur durch die höhere Zahlenordnung verschieden sind, das heißt, wenn ersterer nur mehr Nullen hinter sich hat, so ist die Division schon geschehen, indem man eben so viel Nullen des Dividendus hinten wegstreicht, als ihrer der Divisor hat. So ist

100 | 630000 | 630

Denn eben so viel mal, als 63 Eins ist, eben so viel mal enthalten 63 Zig ein Zig u. s. f., weil beide, der Dividendus, so wie der Divisor, in gleichem Verhältnisse fortschreiten.

2) Wenn der Divisor nur hinten Nullen hat, so setze man diese gleich unter die letzten Zahlen des Dividendus, und dividire nur mit den übrigen Theilen. Diejenigen Ziffern, unter welchen diese Nullen stehen, bleiben dann als Rest übrig:

24000	52	3	7	904	$218\frac{2004}{24000}$
	44	9	5	000	
	2	3	2		
	0	0			

Man versuche es auf die gewöhnliche Weise, oder lasse es vielmehr jeden Schüler versuchen, so würden gerade dieselben Nullen unter die letzten Zahlen kommen; natürlich: denn sie füllen ja nur die Stellen aus, und lassen sich weder vermehren, noch vermindern.

Allgemeine Lehrsätze für alle Species.

a) Die Subtraction ist der Addition, die Division der Multiplication entgegengesetzt. Beide entgegengesetzte Operationen heben sich auf. Daher muß man die Probe der Addition in der Subtraction, und die Probe der Subtraction in der Addition suchen; eben so wie die Division Probe der Multiplication, und umgekehrt, die Multiplication Probe für die Division ist. Denn die durch Addition gefundene Summe kann in alle Summanden aufgelöset werden, wenn man dieselben nach einander abzieht. Hingegen muß der Rest mit dem Subtrahendus zusammengenommen wie-

derum den Minuendus geben; und der aliquote Theil oder der Quotient für die Division so oft mal genommen, als er selbst Theil ist, muß das Ganze oder den Dividend geben, so wie man durch die Theilung des Products der Multiplication den Multiplicandus erhalten muß, sobald man das erstere mit dem Multiplicator dividirt, das ist den so vielten aliquoten Theil des Productes sucht, als der Multiplicator andeutet.

b) In Ansehung der Operationen selbst ist Multiplication mit Addition, und Subtraction mit Division verwandt, und können auch in dieser Folge betrieben werden.

c) Der Unterschied aller Species hat vorzüglich in der schriftlichen Rechnung seinen Grund; sonst ist bei einer jeden Addition auch eine Subtraction, sobald man in die höhern Zahlen kommt, und bei einer jeden Division Multiplication, indem man dadurch den Quotienten erst mit Zuversicht erfahren kann.

d) Alle vier Species erschöpfen zwar den Umfang der schriftlichen Rechnung, aber sie sind durchaus nicht Regulativ für die gesammte Arithmetik. Mit der Feder aber können wir nichts anders machen, als in den vier Species rechnen, das Uebrige muß durch höhere Operationen vollbracht werden.

Besondere Lehrsätze.

I. Für die Addition.

1) Die Summanden zusammengenommen sind gleich der Summe, welche aus ihnen entstanden ist.

2) Wenn die Summe als das Ganze angesehen wird, so ist jeder Summandus als integrirender Theil zu betrachten.

3) Die Größe der Summe hängt ab von der Größe der Summanden; je größer oder kleiner diese, desto größer oder kleiner jene.

4) Die Mehrheit kleinerer Summanden kann die Größe wenigerer ersetzen, und umgekehrt. Denn $\frac{2}{1}\frac{3}{4}$ ist eben so viel, als $\frac{6}{4}$ oder $\frac{5}{5}$ u. s. f.

II. Für die Subtraction.

1) Gleiche Minuenden und Subtrahenden heben sich gegenseitig auf, und geben mithin gar kein Facit. Denn zwischen zwei gleichen Zahlen läßt sich keine Differenz denken, weil die Differenz eben den Widerspruch der Gleichartigkeit in sich faßt.

2) Subtrahenden zu Subtrahenden, und Minuenden zu Minuenden gethan, vermehren einander.

3) Das Facit, oder der Rest der Subtraction, zeigt die Größe der Verschiedenheit des Subtrahendus und Minuendus an.

4) Dieser Rest ist um eben so viel größer, je kleiner der Subtrahendus in Beziehung auf den Minuendus ist, und umgekehrt, um eben so viel kleiner, je mehr sich der Subtrahendus dem Minuendus nähert.

5) In Beziehung auf die Differenz ist es daher gleichviel, ob der Minuendus vermehrt, oder ob der Subtrahendus vermindert wird.

6) Wenn beide, der Subtrahendus, wie der Minuendus, gleich vermehrt oder vermindert wer-

den, so bleibt sich der Rest gleich; wird aber einer mehr oder weniger vermehrt oder vermindert, so muß sich nothwendig die Differenz verändern.

7) Wird die Differenz dem Minuendus entzogen, so muß derselbe dem Subtrahendus gleich seyn; so wie die Differenz mit dem Subtrahendus zusammen allezeit dem Minuendus gleich ist.

III. Für die Multiplication.

1) Die Größe eines Productes hängt ab von der Größe der Factoren.

2) Es ist in Beziehung auf das Product völlig gleichgültig, ob man den Multiplicator oder den Multiplicandus vergrößert.

3) Die Größe des Productes wächst zwar nicht in denselben arithmetischen, wohl aber in denselben geometrischen Fortschreitungen, als die Größe der Factoren; also nicht von 1 zu 2, 3, sondern 1, 2, 4, 8, 16 u. s. f. So wie z. B. 4 ein Drittel mehr ist, als 3, eben so wird 4×12 auch ein Drittel mehr seyn, als 3×12 u. s. f.

4) Wenn man beide, sowohl den Multiplicator, als auch den Multiplicandus vermehrt oder vermindert, so ist es eben so viel, als wenn man nur einen dieser beiden Factoren in gleichem Maße veränderte. Wenn also der Multiplicator mit 4, der Multiplicand mit 5 vermehrt werden sollte, so muß, wenn man die Summe beider Zahlen, das ist 9, einem der beiden Factoren verleiht, dasselbe Product sich ergeben.

5) Das Product in eben dem Verhältnisse verändert, als die Factoren, führt zu gleichen Resultaten. Es ist also einerlei, zu sagen $(5 + \frac{1}{5}) \times 10$, oder $5 \times 10\frac{1}{5}$, oder $5 \times 10 = x + \frac{1}{5}$. Denn

$5 + \frac{1}{5} = 6$; $6 \times 10 = 60$. $(10 + \frac{1}{5}) = 12$;
$5 \times 12 = 60$. $5 \times 10 = 50$; $(50 + \frac{1}{5}) = 60$.

IV. Für die Division.

1) Die Größe des Quotienten hängt ab von der Größe der zwischen dem Dividend und Divisor Statt findenden Differenz. Je größer diese, desto größer wird der Quotient, und umgekehrt.

2) Den Divisor ebenmäßig vermindern, oder den Dividend in eben dem Verhältnisse vermehren, hat gleiche Quotienten zur Folge. Nur muß man auf seiner Hut seyn, das Mehr oder Weniger nicht mißzuverstehen. Denn, wenn gewisse Theile dem Ganzen entzogen werden, so richtet sich, wie wir schon im ersten Theile sahen, die Größe der noch übrigen nach der Menge der noch vorhandenen. $\frac{1}{6}$ des Ganzen ist gleich $+\frac{1}{5}$ von $\frac{5}{6}$ u. s. f. Der Quotient, welcher aus der Division der $(6 - \frac{1}{5})$, das ist 5 in 12 entsteht, wird also gleich seyn dem Quotienten, welcher durch Division der 6 in $(12 + \frac{1}{5})$. Denn $6 - \frac{1}{5} = 5$; 5 ist in 12 $2 + \frac{2}{5}$ mal; $12 + \frac{1}{5} = 14\frac{2}{5}$; 6 ist in $14\frac{2}{5} - 2\frac{1}{3}\frac{2}{0}$, das sind $\frac{2}{5}$ mal. Man vergleiche S. 179 ff.

3) Der Quotient durch den Divisor multiplicirt, giebt den Dividend wieder. Denn der Quotient ist allezeit der so vielste aliquote Theil, als der Divisor besagt; wird derselbe nun eben so viel mal wiedergenommen, so erhalten wir natürlich die Summe wieder, aus der er entstand.

4) Den Quotient oder den Dividend auf gleiche Weise vermehren oder vermindern, giebt gleiche Resultate.

5) Ein aliquoter kleinerer Theil, oder bestimmter, ein im Verhältniß des Dividends kleinerer

Divisor giebt einen grösszern, und ein in eben dem Verhältnisse grösserer giebt einen kleinern Quotienten. Der Quotient nimmt diesem zu Folge natürlich auch in eben dem Verhältnisse ab, als der Divisor zunimmt, und umgekehrt muß er auch in eben dem Maße zunehmen, als der Quotient abnimmt. Es ist daher in Ansehung des Resultates auch ganz einerlei, ob ich den Divisor um einen aliquoten Theil vermehre, oder den Quotienten um ebendenselben gleich großen Theil vermindere. Nur muß man sich wiederum, wie oben, durch die Benennung der Theile nicht irre leiten lassen, sondern sich vielmehr an den Werth halten, und deshalb hier wiederum S. 179 ff. vergleichen.

Ende des zweiten Theils.

Des

Lehrbuchs

der

arithmetischen Verhältnisse

dritter Theil.

Enthaltend

die

Methodenlehre

oder

eine ausführlichere Darlegung der Stufenfolge von arithmetischen Uebungen und Beschreibung des methodischen Verfahrens.

A.

Allgemeiner Grundriß der Methodik.

Es ist ein großer Unterschied zwischen der bloßen kahlen Darstellung einer Wissenschaft, und zwischen der Art und Weise, auf welche sie gelernt wird. Die Wissenschaft ruht allezeit auf sich selbst, und hat ihre Regel, so wie ihr oberstes Gesetz für sich. Die Methodik beruht immer lediglich auf richtigen psychologischen Prämissen. Die Arithmetik, bei der es hauptsächlich darauf angesehen ist, daß sie den Verstand erleuchte, wird natürlich ein ganz anderes Ansehen bekommen, wenn sie als Wissenschaft kahl hingestellt wird, und ganz anders aussehen, wenn sie auf eine richtige psychologische Stufenleiter gegründet, mehr als inneres Bildungsmittel wirken soll; wenn es darauf abgesehen ist, daß der Schüler zu dem Kern komme, den die Wissenschaft in sich verbirgt. Es ist dieses Ortes nicht die Parallele zu ziehen, welche zwischen der wissenschaftlichen oder objectiven Behandlung eines Gegenstandes, und zwischen dem methodischen oder subjectiven Verfahren Statt findet. Nur von der Arithmetik dürfen wir hier reden. Als Methodenlehre darf sie nicht die obersten Sätze der Wissenschaft, nicht Erklärung der allgemeinen Begriffe, nicht einmal allgemeine Regeln des Verfahrens oben ansetzen. Die rein praktische Darstellung der Sache in ihrem Zusammenhange ohne Erklärung ist das rechte, was man hier zu leisten hat. Um das ganz bei der Arithmetik zu erreichen, muß man vorerst alle Stufen, die man zu betreten hat,

durchgehen; muß man wissen, was auf jeder einzelnen Stufe zu leisten ist; muß den innern Zusammenhang der Arithmetik selbst als Gegenstand der menschlichen Erkenntniß gegeben haben. Die erste Abtheilung dieses Werkes ist für diesen Zweck berechnet. Hier findet man wesentlich nur die Stufen angegeben, welche die Wissenschaft uns selbst darbietet; es ist angegeben die Reihenfolge von Uebungen in demjenigen Zusammenhange, in welchem sich die Wissenschaft vollständig in uns erzeugen kann. Die Art und Weise, wie man diese Uebungen betreiben soll, setzt sich die gegenwärtige Abtheilung vor zu beschreiben. Sie wird sich wesentlich auf Methode einschränken, und sich nicht in die Angelegenheiten des Objects mischen, dessen Darstellung sie voraussetzen muß. Subjectiv faßt sie die Arithmetik, und fragt hauptsächlich: Auf welche Weise fange ich es an, daß ich diese oder jene Fertigkeit, diesen oder jenen Begriff mir ganz zueigne?

Man wird es einer Methodenlehre verzeihen, wenn sie sich nicht bekümmert um die Rechtfertigung des Objects, auf welches sie gewiesen ist. Sie ist im Dienste des Menschen, der nach dem Objecte hinstrebt, und sie erfüllt ihren Beruf vollkommen, wenn sie eine gute Vermittlerin ist.

Soll sie aber mit einigem Glücke die Arithmetik nicht blos der Form, sondern dem Geiste nach dem Schüler beibringen, so wird sie einige Forderungen machen müssen, welche vielleicht keines der bekannten Lehrbücher vollkommen gewähren möchte. Deshalb ist die Methodik wesentlich für unsere Darstellung der Zahl berechnet. Sie wird daher nicht blos Lehrsätze verständlich zu machen begehren, sondern vielmehr die ganze Thätigkeit des Geistes in Anspruch nehmen. Dieß würde ihr aber völlig mißlingen, wenn sie sich nicht lossagen

dürfte von der gewohnten Formel. Sie fordert als erste Bedingung ihrer Wirksamkeit, daß sie nicht mit allgemeinen Grundregeln sich abzugeben habe; weil in diesem Falle ihr aufgegeben wäre, etwas Fruchtloses auf den fruchtbaren Boden zu pflanzen.

Es müßte ihr zwar gelingen, das Gewächs hervorzutreiben, aber was helfen die Reben ohne Trauben? Die erste Frage ist bei der Methodik wesentlich: welcher wahre Gewinn ist aus dieser oder jener Sache, aus dieser oder jener Fertigkeit, zu hoffen, nicht blos für das Object, nicht blos für die Wissenschaft, sondern für die gesammte menschliche Bildung.

Die arithmetischen Uebungen sollen von dem Sinnlichen ausgehen, ist ein alter pädagogischer Satz, der hier keinesweges neu aufgestellt ist. Die Versinnlichung der Zahlenverhältnisse ist vielmehr uralt. Schon die ältesten Völker bedienten sich gewisser für diesen Zweck eingerichteten Mittel. Nur die Barbarei und der Scholasticismus des Mittelalters konnte den Naturgang so sehr verlassen, daß das mechanische Formelwesen der Rechenkunst an die Stelle der reinen Anschauung trat, zu der sich die griechischen Lehrer dieser Wissenschaft wirklich erhoben hatten. — Das Bedürfniß einer Versinnlichung mußte natürlich wieder erwachen, je mehr man einsehen lernte, daß die Arithmetik, bei ihrem mächtigen Einfluß auf alle Wissenschaften und Verhältnisse des Lebens, dennoch von ihren Verehrern immer verlassener dastehen bleibe. Aber man suchte freilich immer nichts weiter, als nur die Verständlichung der einmal herrschenden Formeln, und befriedigte sich, wenn man eine allgemeine Regel begreiflich gemacht hatte.

Man schickte gewöhnlich allem andern die Benennung der vier Species voraus, und erklärte dann eine jede. Diese Erklärung suchte man durch

Beispiele zu verdeutlichen. Allein dadurch konnte wenig gewonnen werden; weil eine Regel allezeit eine Reihe concreter Fälle vorausſetzt, ehe man ſie verſtehen kann, und für ſich wenig Bedeutung hat, wenn ſie nicht gleich mit andern zuſammengeſtellt werden kann. Um mich eines Beiſpiels zu bedienen, ſo wähle ich hier den gewöhnlichen Anfang der arithmetiſchen Lehrbücher: „Die Rechenkunſt iſt eine Wiſſenſchaft, durch bekannte Zahlen ſolche unbekannte Zahlen zu finden, welche dasjenige zeigen, was geſucht wird;“ *) oder: „Zahlen aus einander nach gewiſſen Regeln zu erfinden;“ **) oder: „die Rechenkunſt lehrt uns alles, was in Münzen, Gewichte, Maße und Zahl u. ſ. w. vorkommen kann, zu entziffern.“ ***) Das mag alles recht gut und wahr ſeyn. Nur Schade, daß der Schüler mit den Verfaſſern die ganze Arithmetik durchgemacht haben müßte, um dieſe Erklärung vollſtändig zu verſtehen. Man mißverſtehe mich nicht; mein Tadel trifft allein die Methode; ſonſt iſt beſonders das letztgenannte Buch, mit wenig Einſchränkung, für ſeinen Zweck, nach meiner Meinung, unbedingt zu empfehlen. Eben ſo vergeblich iſt es auch, den angenommenen vier Species eine Erklärung vorauszuſchicken. Die Elementarſchüler wiſſen überhaupt nicht, was ſie mit den Species anfangen ſollen; begreifen nicht die Unterſcheidungsgründe derſelben, weil ſie dieſe nicht kennen; um wie viel vergeblicher iſt es, ihnen eine Definition begreiflich machen zu wollen. Hier leuchtet der obige Unterſchied zwiſchen einer wiſſenſchaftlichen Behandlung

*) Rechenkunſt, in zwei Theilen, von Schmid; Leipzig, in der Dykiſchen Buchhandlung.

**) Büſch Mathematik, 1ſter Theil, S. 27. Hamb. 1798.

***) Vollſtändiges Hand- und Rechenbuch für angehende Kaufleute und Oekonomen, und beſonders für Europas Handlungsſchulen entworfen von C. F. Hoff; Magdeburg, 1802. 1ſter Theil, S. 2.

eines Gegenstandes, und dem methodischen Verfahren, bei der Unterweisung in demselben, recht ein. Ein Satz kann an sich ganz wahr, und sehr bündig bewiesen seyn; daraus folgt noch nicht, daß er auch mir als solcher einleuchten müsse. Auf dem Letztern ruht nun aber allein unsere subjective Ueberzeugung. So ist z. B. der Multiplicationssatz: „Wenn zwei Zahlen durch einander multiplicirt sind, so faßt das Product den einen Factor so oft in sich, als der andere Factor eins in sich faßt," ganz gut so dargethan. Das Product ist dadurch erwachsen, daß man alle Theile des einen Factors so oft genommen hat, als alle Theile des andern Factors Einheiten in sich selbst fassen. Allein es wird diese Regel durchaus von keinem Zöglinge verstanden werden, bevor dieser nicht bis zur deutlichsten Einsicht in das ganze Multiplicationswesen gelangt ist. Daher wird auch kein Beweis für ihn seine Bündigkeit haben können, bevor nicht dieß geschehen ist. Gesetzt aber auch, man brächte durch Anhäufung von Beispielen seinen Schüler zur Einsicht in ein Anzahl solcher allgemeinen Regeln, so würde man dennoch dadurch nichts gewinnen, weil eine Regel nur dann Bedeutung für mich haben kann, wenn sie eine Menge von einzelnen Fällen subsumiren kann, die also vorher gegeben seyn müssen; und diese Subsumtion kann ferner nur dadurch Bedeutung haben, daß sie den bestimmten Kreis der einzelnen Fälle, welche sie unter sich begreift, absondert von den hetrogenen, die sich nicht unter sie zusammenfassen lassen, so wie überhaupt durch Gegensätze eine Regel nur erst Bedeutung empfangen kann *). Die Bildung muß nirgends mit allgemeinen Wahrheiten beginnen, sondern damit schließen.

*) Das alte opposita elucescant leidet also auch hier seine Anwendung.

Die Zahlen gehen alle nur von 1 bis 10; denn alle die Zehen übertreffende Zahlen sind nichts weiter, als weitere Anwendung; folglich wird man auch, genau genommen, durchaus nur mit diesen wenigen Ziffern zu rechnen haben. Daß diesem also sey, zeigt eine kurze, aber genauere Ansicht der Zahl, und die Art und Weise, wie der Arithmetiker mit ihr umgeht. So ist 17 nichts anders, als der Inhalt der ersten Ordnung und 7 Einer, und 20 ist nichts anders, als die Zahl 2 angewendet auf eine höhere Ordnung; so wie hinwiederum 200 nichts anders ist, als die in eine noch höhere Ordnung gebrachte 20, und 2000 die noch um eine Stufe erhöhete 200. So wie hier die 2 ein Stammbaum unendlich großer Summen seyn kann, so ist es auch eine jede der übrigen einfachen Zahlen. So wie ich also die 2 behandeln kann, so werde ich auch mit zwei Hundert, und nicht anders bei zwei Tausend u. s. f. verfahren.

Das Verfahren mit den einfachen Zahlen wird daher durchaus die Basis seyn, nach welcher die zusammengesetzten behandelt werden. Da die zusammengesetzten Zahlen nur die weitere Anwendung der einfachen sind, so werden auch alle Verhältnisse derselben nur die weitere Anwendung der Verhältnisse einfacher Zahlen seyn. Aus dem Letztern geht hinwiederum hervor, daß auch alle Regeln für noch so große Zahlenverhältnisse nur die weitere Anwendung derjenigen Regeln seyn müssen, die für einfache Zahlen gelten. Wenn dieß ist, so wird folgende allgemeine Regel des Verfahrens gelten:

Man lehre den Schüler vorerst alle Regeln, so wie alle Verhältnisse, an einfachen Zahlen finden, ehe man zur Anwendung auf größere Summen übergeht.

Dadurch erleichtert man sich zugleich selbst die Uebersicht, so wie die ganze Arbeit. Es ist also

vergeblich, und führt auf Abwege, wenn man nach der gewöhnlichen Reihenfolge, oder nach der Ordnung der vier Species, geht. Es ist nicht der richtige Weg, zuerst eine Reihe von Zahlen aussprechen, dann eine eben so große Reihe addiren, subtrahiren, dividiren u. s. f. zu lehren, weil die Anwendung einer Regel nicht eher gemacht werden kann, als sie begriffen ist, und zu Begreifung derselben eine vollständige Uebersicht des Ganzen in seinem Zusammenhange erfordert wird.

Es wird daher auch wohl dahin kommen, daß der Schüler Zahlen aussprechen lernt; auch wird ihm das mechanische Zusammenzählen großer Summen ja wohl möglich werden. Kurz, er wird lernen auf der Tafel rechnen, wie man gewöhnlich rechnen lernt. Aber die Verhältnisse der Zahlen einzusehen, den Grund derselben ausführlich darzulegen, und sich seines Verfahrens bewußt zu werden, dahin kann und wird es nicht auf diesem Wege kommen; und wenn einige geistvolle Mathematiker dennoch dahin gekommen sind, so gelangten sie auf andern Wegen dahin, sonst hätten sie sich auch zur Lösung neuer Probleme auf neue Weise nicht erheben können. Nun läßt sich aber nichts fassen, was man nicht begreifen, nichts einsehen, was man nicht verstehen kann. Eine große Zahlensumme hinzuwerfen, wenn man noch nicht einfache Verhältnisse zu begreifen im Stande ist, heißt durchaus etwas anfangen, was alle Fassungskraft des noch ungeübten Zählers übersteigt. Wie ist es auch möglich, eine Vorstellung von Million zu haben, wenn man kaum mit 10, 20 umgehen gelernt hat? und wer nicht die Regeln kennt, nach welchen sich Einer verbinden lassen, wie wird der Zehner und Hunderter zu schätzen wissen?

Wir werden unendlich viel mehr mit den einfachen Zahlen zu thun haben, als man bisher da-

mit sich abzugeben für nöthig fand, und werden daher uns auch hüten, früher die einfachen Zahlenelemente zu verlassen, bis wir sie in ihrem ganzen Zusammenhange und Umfange verstanden.

Die Zahlenordnung ist dann nicht schwer zu finden. Man muß sich nur hüten, nicht allzusehr den Gebrauch des Zifferwesens zu beschleunigen. Es frommt nichts, und führt auch keine großen Resultate herbei. Die Sache muß uns erst bekannt seyn, ehe das Bedürfniß uns treibt, die Zeichen zu suchen; und wir werden auch nicht eher mit Glück die Ziffern gebrauchen, bis wir die Zahl verstanden haben. Eben so müssen unsere Regeln nicht für das Zahlenansetzen, Zahlenschreiben, sondern vielmehr für das Zahlencombiniren gegeben seyn; daraus ergeben sich dann die mechanischen Regeln von selbst.

Der methodische Gang wird sich daher nicht an die Species halten, und der Lehrer der Arithmetik wird nicht glauben, daß erst eine Species in gewöhnlicher Vollständigkeit vollendet seyn müsse, ehe man eine neue beginnen dürfe; vielmehr wird er sich an die natürliche Zahlenordnung halten, und nicht eher die Einer verlassen zu können glauben, bis sie nach allen ihren Verhältnissen verstanden sind. Auf welche Weise dieß, meines Ermessens, geschehen könne, findet man in dem ersten Theile des Lehrbuchs selbst. — —

Es war daher löblich, daß man schon darauf kam, das Kopfrechnen neben dem Schriftlichen zu betreiben; aber man sollte nur noch einen Schritt thun, und das Erstere dem Letztern überordnen. Allein das geschah nicht, und konnte nicht geschehen, so lange man für das sogenannte Kopfrechnen die Regeln aus der gewöhnlichen Rechenkunst herholen mußte. Da wurde denn aus dem Kopfe numerirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt, alles

so, wie man es auf der Tafel that; aber die reinen Verhältnisse auffassen lehrte man nicht, weil man sich eben durch die lange Uebung und das so fest zu bestehen scheinende System verführen ließ. Wir versuchten daher neue Bahnen zu betreten, und es gelang, die praktische Ausübung in ihrer ganzen Umfassung. Vermöchte der todte Buchstabe ein Aehnliches zu bewerkstelligen, so würde im Allgemeinen manches gewonnen seyn. Gewonnen für den gesammten Zweck der Unterweisung, so wie für die Arithmetik insbesondere.

Die Arithmetik soll nicht blos als ein auf sich selbst ruhendes System behandelt werden, sondern sie soll uns auch gewöhnen zum richtigen Nachdenken, zu einer bündigen Gedankenfolge, zu einem Totalüberblick u. s. f. Dieß kann aber dann nicht geschehen, wenn wir blos einzelne Fertigkeiten uns erwerben; nicht durch die noch so vollständige Einsicht einer Regel, sondern durch eine Uebersicht des ganzen Zusammenhanges aller Verhältnisse. Es wird daher kein Schritt gethan werden, von dem der Schüler nicht bestimmte Rechenschaft zu geben weiß, kein Resultat angenommen, ohne den bestimmten Gang anzugeben, wie es gefunden ist. Die Führung des Beweises muß daher immer Hauptsache seyn, nicht die Schnelligkeit, ein Resultat zu finden, allein. Erst muß der Weg bekannt werden, auf welchem man ein Resultat finden kann; hier darf keine Stufe übersprungen werden; hier geht alles Schritt vor Schritt. Ist dieser Gang erst fest und sicher begründet, so ist es dann erst eine Freude, selbst das Resultat zu finden, und mehrere Stufen nur zu berühren. Aber immer werden wir nicht eher glauben, daß unser Schüler rechnen könne, bevor er es nicht vermag, mit Leichtigkeit die ganze Reihenfolge seiner Schlüsse und seines Thuns durchzugehen und darzulegen.

B.

Ueber die Stufenfolge der arithmetischen Uebungen im Allgemeinen.

Wir haben nicht ohne Ursache eine neue Straße betreten, und es liegt uns jetzt ob, Rechenschaft zu geben, warum wir gerade so, und nicht anders, die Uebungen auordneten.

Wir unterschieden zwei Hauptübungen, deren eine sich mit der Zahl in Concreto, wie wir es nannten, die andere mit der abstracten beschäftigt. So lange ich nämlich die Zahl noch an Gegenständen nachweisen kann, so lange ich sie noch als Einzelnheiten zu einander geselle, um nach diesen die Regeln des Verfahrens zu abstrahiren, so lange behandele ich die Zahl noch immer concret. Ein jedes Zusammenzählen einfacher oder mehrfacher Zahlen, ein jedes Abziehen von einer gegebenen Summe, ein jedes Vergleichen der einen Zahl mit der andern, ist eine Auffassung des Concreten. Sobald aber nur die Regel auf Größe angewendet wird, so daß dann nichts mehr darauf ankommt, ob die Zahl mehr oder weniger gelte, ob ihr Werth größer oder kleiner sey, so müssen wir sie abstract nennen. So wäre es z. B. eine Uebung der Zahlenverhältnisse in Concreto, wenn ich $\frac{1}{3}$ irgend einer Zahl, z. B. von 30 suchen wollte, weil dann die 30 als eine bestimmte gegebene Größe gedacht wird, mit der ich operiren soll. Wenn ich aber ein Drittel von $\frac{30}{30}$ suchen sollte, so wäre dieß ein Verfahren in Abstracto, weil hier der dritte Theil von einer unbestimmten, nur gedachten Größe genommen ist. Ein Drittel ist ein bloßes Verhältniß, ein so bestimmter Theil eines Ganzen. Durch dasselbe lerne ich weder die Größe, noch den Werth des Ganzen kennen. Daher gehört auch dieser Ausdruck, Drittel, schon in das Gebiet abstracter Verhältnisse. Wenn ich daher diesen Theil von ir-

gend einer Zahl suche, so ist dieß schon die Anwendung der abstracten Zahl auf die concrete.

Wir beginnen natürlich unser Zählen mit den Concretis. Daran lernen wir eigentlich die Zahl behandeln. Wir müssen hier eine jede Zahl nachweisen, müssen ein jedes Verhältniß erst sehen, ehe wir es einsehen lernen.

Es fragt sich, wie wir die Zahl sichtbar machen? auf welche Weise und durch welche Stufenleiter wir uns dann zur Abstraction erheben?

Da ich eine Frage nicht gut von der andern zu trennen weiß, so will ich zuerst die Versinnlichungsmittel beschreiben, und damit zu gleicher Zeit die Detaillirung der Stufenfolge aller Uebungen.

Man hat schon seit Basedow, und früher her, in den bessern Anstalten aufgehört, den Elementarschülern durch bloße Ziffern das Zählen begreiflich zu machen. Man wählte viel lieber einen jeden Gegenstand, der vor die Augen kam; und um dieses Geschäft noch interessanter zu machen, so hieng man ein kleines Mährchen an die Gegenstände, mit denen man zählen wollte, und fand sich belohnt, wenn die liebe Jugend andächtige Zuhörer waren.

Das Letztere wäre recht gut, wenigstens höchst kinderfreundlich, wenn nur nicht ein psychologischer Mißgriff dahinter verborgen läge. Die Kinder sollen zählen lernen, und der Lehrer muß doch wohl wünschen und darnach streben, daß die Kinder ihre ganze Aufmerksamkeit auf die Zahl richten; wird das aber der Fall seyn, wenn er da eine Fabel einmischt; wird da nicht dem Kinde das trockene Zählen durch diesen Contrast recht fühlbar werden. Solche Mittel scheinen zu beleben, schläfern aber im Grunde nur ein, indem sie die Aufmerksamkeit theilen; das heißt aber zerstreuen.

Die Erfahrung hat mich gelehrt, daß die Kirschen und die Aepfel, mit denen der Lehrer zählen ließ, zwar in gutem Andenken blieben; die Zahl selbst aber, als gar zu entfernt liegende Association, verloren ging. An solche Dinge muß bei Uebungen der Art nie gedacht werden; sonst wird es dem Lehrer nimmer gelingen, sich ganz der Kinder zu bemeistern. Eine einzige Erinnerung an einen Gegenstand, der dem Kinde bei irgend einer Gelegenheit einmal lebhaft Freude machte, reicht hin, um die Aufmerksamkeit des Kindes auf die ganze Stunde hinweg zu nehmen. Kommt nun noch die gewöhnliche Fragemethode hinzu, wo ein Kind in einer Stunde oft nur ein oder zwei mal zu antworten verbunden ist, so darf man sich wohl nicht wundern, wenn in Jahren oft nur wenig geleistet wird.

Die Methode des Elementarzählens, nach welcher man nur Gegenstände einer und derselben Art nennt, z. B. ein Finger, zwei Finger u. s. f., hat viel weniger gegen sich. Doch fehlt ihr zweierlei. Zuerst geht dadurch abermals ein Theil der Aufmerksamkeit verloren, welche die Zahl für sich allein fordert. Denn die Zahl ist ja nicht Prädikat eines Subjects, ist kein Eigenschaftswort eines bestimmten Gegenstandes. Es kommt gar nichts hier auf die eins, zwei, drei Finger an, sondern auf die Eins, Zwei, Drei selbst, nicht auf die Eigenschaft der Gegenstände, sondern nur auf das Mehr oder Minder. Ferner fehlt es dann an einer bestimmten, auch sinnlich dargestellten Reihenfolge von Uebungen, und die Versinnlichung ist mithin unvollständig. Denn zuerst ist die Größe nicht dargestellt; eine Eins ist wie die andere, und als Eins von der andern durchaus nicht unterschieden. Diese Eigenschaft sollte auch durchaus dargestellt seyn. Die Versinnlichungsmittel sollten also höchst einförmig, sollten sich durchaus gleich seyn. Die

Stufenfolge von Uebungen soll ebenfalls immer vorschweben, bis ein Pensum vollendet ist. Dies alles kann nicht erreicht werden, wenn man das Elementarzählen an Gegenstände bindet, die immer verschiedene Prädikate, verschiedene Constellationen haben.

Die Zahl ist völlig eigenschaftslos; ihr Versinnlichungsmittel muß daher eben so beschaffen seyn. Weil aber kein Gegenstand weder gedacht, noch gemacht werden kann, der ohne Eigenschaften wäre, so muß er wenigstens so beschaffen seyn, daß die Aufmerksamkeit nicht durch die Eigenschaft geleitet werde; also so wenig Eigenschaften als möglich.

Weiter ist die Zahl der Veränderung unterworfen, in so fern sie als sich vermehrend oder vermindernd erscheint. Die innere Veränderlichkeit derselben muß äußerlich dargestellt, die Zahlenordnung, die Vergrößerung, kurz alles, was wir im Innern mit ihr thun können, das muß auch Aeußerlich mit ihr vorgenommen werden. Die innerliche Veränderlichkeit, oder die Verwandlung der Zeit, äußerlich dargestellt erscheint aber als Beweglichkeit im Raume. Denn die Veränderung im Raume kann nur durch Veränderung des Lokales dargestellt werden, und Veränderung des Ortes ist Bewegung. Es werden alle einfache Zahlen so vielfach zusammengesetzt werden müssen, als nur möglich ist; und alle Verhältnisse, die der innere Sinn sich construirt, müssen dem Aeußern erst vorgelegt werden. Die Beweglichkeit wird ein nothwendiges Erforderniß des Versinnlichungsmittels der arithmetischen Anschauung seyn. Denn auser ihr ist es nicht möglich die Veränderungen der Zahl nachzuweisen, außer ihr kann nicht die Construction der Zahl versinnlicht werden.

Endlich ist die concrete Zahl nur das Bild der abstracten, und wir müssen an den erstern nur die

Regeln des Verfahrens lernen, um zur Abstraction überzugehen. Es können keine Verhältnisse der Zahlen vorkommen, die nicht in den einfachen Zusammensetzungen derselben gegründet sind. Das Versinnlichungsmittel kann daher streng genommen nur für die concrete Zahl Statt finden. Die abstracte läßt sich nicht mehr verkörpern als abstract. Da aber in der concreten der sinnliche Hintergrund aller Verhältnisse liegt; da Halbe und Viertel sich nicht anders verhalten können, als 2 und 4, und Drittel und Fünftel in einem eben so nothwendigen Verhältnisse stehen, als die 3 und 5; daß alle noch so verwickelte Verhältnisse blos in einfachen Constructionen der concreten Zahlen ihren ersten Grund haben. Es muß daher das Versinnlichungsmittel diese Verhältnisse der concreten Zahl vorlegen. Man muß an demselben die reinen abstracten Verhältnisse gleichsam sehen; z. B. alle mögliche Verhältnisse, welche zwischen 5 und 7 vorkommen können, müssen hingestellt werden. Dadurch werden wir aber mit allen möglichen Verhältnissen bekannt, in welchen die Siebentel und Fünftel stehen können. Wir müssen diese Verhältnisse der abstracten Zahlen durchaus allein darauf gründen, worauf sie beruhen. Sie beruhen aber auf den Zahlen selbst. Jedes andere, was jenseit dieser rein arithmetischen Verhältnisse liegt, das ist der Zahl fremd. Die Verhältnisse der Viertel und Siebentel durch Eintheilungen eines Raumes eines Quadrats begreiflich machen wollen, ist gewiß ein Umweg, weil die discrete Größe dadurch zur empirischen wird. Aus der Anschauung der Vier und Sieben selbst muß es hervorgehen. Dann wird der Zögling nur an einer einzigen Zahl geübt werden können, um den Typus zu erhalten, dem gemäß er mit allen Zahlen umgeht, und nach welchem alle Zahlenverhältnisse construirt werden müssen. Er wird dann nicht den Raum, nicht seine Augen fra-

gen, welches Verhältniß hier oder dort Statt findet, sondern er wird es anschauen, sobald er die Zahl selbst vernimmt. Das letzte und wichtigste Erforderniß eines Versinnlichungsmittels ist demnach, daß alle Zahlen so dargestellt werden, daß man in denselben die Verhältnisse versinnlicht finde, welche die abstracten Zahlen haben, so daß man durch eine vollständige Ansicht der concreten Zahl eine eben so vollständige Anschauung der abstracten vorbereitet finde.

Ich fordere demnach von dem Versinnlichungsmittel eine mögliche Entfernung aller Qualitäten, eine Symmetrie, Beweglichkeit und Combinationsfähigkeit. Ein solches glaube ich gefunden zu haben; und ein mehrjähriger Gebrauch hat mir die Wichtigkeit desselben so einleuchtend dargethan, und mich zu der Hoffnung berechtigt, es werde sich mehr verbreiten, und eben dadurch diesem höchstwichtigen Theil des Unterrichts in jeder Hinsicht einen bedeutenden Vorschub leisten.

Diese einfache Rechenmaschine besteht nämlich dem Wesentlichen nach aus hundert verschiedenen Stäben *) für alle einfache Zahlen von eins bis zehn. Jeder einfachen Zahl gehören zehn Stäbe. Die Einer (von denen des öftern Gebrauchs wegen gewöhnlich 20 bis 30 vorhanden sind,) sind Würfel von der Größe eines Zolles. Alle übrige Zahlen sind, nach dem Verhältnisse der Mehrheit, länger. Die Zwei hat also die Länge von zwei, die Drei die Länge von drei Zollen u. s. f. Die Breite und Dicke bleibt aber nur ein Zoll.

Alle diese Stäbe befinden sich in einem für sie eingerichteten Kasten, der in zehn Fächer eingetheilt

*) Man wird es mir nicht zutrauen, daß ich mit den Pöhlmannschen Stäben unbekannt sey; aber hoffentlich auch finden, daß diese Rechenmaschine nichts damit gemein hat.

ist, wovon ein jedes die zehn Stäbe enthält, welche zu einer jeden Zahl gehören. Natürlich richtet sich die Größe eines jeden Faches nach der Länge der Stäbe. Dieser Kasten ist mit einem Deckel versehen, der hinwiederum so eingerichtet ist, daß darauf die Zollstäbe aufgestellt werden können, damit sie auf verschiedene Weise zusammengesetzt und getrennt werden können, wie es sogleich näher beschrieben werden soll. Diese Maschine hat vor andern dasjenige voraus, daß sie alle Eigenschaften vereinigt, welche vorher von einer passenden Versinnlichung gefordert wurden. Sie ist gleichsam die äußerliche Darstellung des ganzen Systems, wo sich ein jedes Verhältniß nachweisen läßt; und es ist die Absicht, daß sich dieses auch eben so rein und fest im Innern abdrücke.

Jedoch hat die Maschine an sich nur in so fern Werth, als sie ein sehr brauchbares Mittel zu dem Zwecke ist, für welchen sie bestimmt ist. Ohne die rechte Behandlung würde sie wenig frommen, wenn auch immer noch ihren relativen Werth behaupten. Die Behandlung ist die Hauptsache; indem ich sie beschreibe, gebe ich zugleich den methodischen Gang des Elementarrechnens.

Zuerst soll nicht die Zahlengröße, sondern die Zahlenordnung dargestellt werden. Nicht die Größe, auch nicht die Mehrheit, sondern die Folge der Zahlen ist zuerst Hauptsache. Denn die Größe wird dadurch erkannt, daß man eine Zahl nach der andern aufstellt, und die folgende größere allezeit als eine solche ansieht, welche alle vorhergehende unter sich begreift. Dadurch entsteht eben in uns die Zahl; die Ordnung und Folge macht sie allein. Es werden daher die Einer genommen, und diese nach einander aufgestellt, und darnach gleich rück- und vorwärts gezählt, ohne Weiteres *). Man stellt also zuerst nur eins auf, und

*) Vergl. §. 1 und 2.

und benennt dieses. Dazu gesellt man alsdann ein anderes, und benennt dieses zuerst abermals eins; schiebt beide zusammen, und spricht zwei. Man trennt dann beide, und bezeichnet jedes für sich als eins. Nachdem man wieder beide zusammengethan und zwei genannt hat, so nimmt man den dritten Würfel, und läßt ihn natürlich auch als eins bezeichnen; verbindet man denselben aber mit den beiden erstern, so legt man allen zusammengenommen den Namen drei bei. Das, was man mit diesen drei that, geschieht auf dieselbe Weise mit allen einfachen Zahlen bis zehn. Man merke hierzu noch folgendes: a) Allemal, wenn hinwiederum eine Eins zu den übrigen Zahlen gethan ist, so zählt man die vorhergehenden wieder mit. Nachdem man z. B. eins zu zwei gethan hat, nennt man alle zusammen drei. Nun wiederholt man die Uebrigen, indem man auf jedes Einzelne zeigend spricht: Eins, zwei, drei u. s. f. b) Es wird allemal eben so weit zurück gezählt, als man vorwärts zählte, und eine jede Summe um eben so viel vermindert, als man sie vermehrte. c) Man bediene sich bei der ersten Uebung nicht der Copula ist, z. B. zwei und eins ist drei, weil dieß dem Kinde noch nicht begreiflich oder wenigstens zu langwierig seyn würde. Es soll hier die Zahl nicht construirt, sondern nur geordnet werden; und in der ersten Uebung soll diese Ordnung nur bezeichnet, nur eine verständige Nomenclatur gegeben werden. Man glaubt nicht, wie man sich durch solche kleine Fehlgriffe schaden, und die Fortschritte hemmen kann, wenn man es nicht selbst erfahren *). In jener Copula liegt schon ein Schluß,

*) Ich bin durch diese Irrwege natürlich selbst gewandert. Ich habe den arithmetischen Cursus mehreremal vom Anfange bis zu Ende durchgenommen, und mußte natürlich von den Schülern selbst geleitet, und mit einer beständigen Reflexion über das, was in dem Kinde vorgeht, und was der Zweck dabei

den man ausspricht. Man muß zuvor jedes Einzelne vollständig begriffen haben, ehe man ihn fassen kann. Das Kind muß hier schon wissen, was drei ist, wie es wurde, ehe es die Aufmerksamkeit auf drei Dinge zugleich, nämlich auf zwei gegebene, vielleicht schon zusammengesetzte Zahlen, die für sich bestehen, auf die Art, wie diese verbunden werden, und auf das Product, welches daraus entsteht, richten kann. d) Vor allem andern überzähle man rück- und vorwärts die zehen häufig, weil sie einerseits alle übrigen Einheiten in sich begreift, und die Ordnung beschließt; andererseits aber auch folgender Uebungen wegen, besonders da, wo sie als combinirte Einheit behandelt werden soll, zur möglichst größten Deutlichkeit gebracht werden muß.

2. Nachdem man einzeln die Zahlen von eins bis zehen aufgestellt hat, so geht man weiter, und bedient sich der zusammengesetzten auf folgende Weise. Man setzt zuerst die Eins oben an, darunter die Zwei, unter die Zwei die Drei, bis zehen. Nun zählt man, wie vorher, eins, zwei, drei bis zehen. Es ist durch diese Zusammensetzung auch für das Auge eine Stufenleiter entstanden, und man muß das Kind üben, allemal eine bestimmte Zahl auch an der Rechenmaschine zeigen zu können, damit es allmählich gewöhnt werde, Verhältnisse zu suchen und zu schätzen. Man fordert also, daß es 7, oder 9, oder irgend eine Zahl, sogleich zeigen solle. Man macht den Schüler darauf aufmerksam, welche Zahl einer gegebenen vorausgeht, oder welche folgt. Der Zögling sage also: nach 5 folgt 6; vor 5 steht 4 u. s. f. Zuerst setzt man zu einer jeden dieser Zahlen eins, und zeigt, daß eins zu eins gesetzt, gleich wird der Zwei, und eins mit zwei verbunden der Zahl drei gleicht. Dieselbe

ist, am Ende auf einen sicherern und festern methodischen Gang geführt werden.

Uebung setzt man fort bis zehen. Dazu spricht erst der Schüler: 1 und 1 ist 2; 2 und 1 ist 3; 3 und 1 ist 4 u. s. w. Damit dies auch unabhängig von der Anschauung werde, so läßt man die Kinder absehen von der Maschine, und zu irgend einer Zahl noch eins zählen; aber so, daß zuerst nur die progressiven benannt werden, und dann erst die Bestandtheile derselben. Z. B. fünf, sechs: fünf und eins ist sechs; sechs, sieben: sechs und eins ist sieben; sieben, acht: sieben und eins ist acht.

So wie man hier zusammensetzt, so nimmt man auch hinwiederum weg, bis man zur Eins gelangt ist.

Zuletzt fragt man noch, ob dieß alles verstanden sey, und man wird von dem Kinde die bestimmte Antwort erhalten. Auf eben dieselbe Weise behandelt man mit gleicher Ausführlichkeit auch die Zwei. Man setzt zuerst eins, und dann noch eins, zu irgend einer Zahl; nimmt dann wieder eins, und noch eins weg, und macht zuerst darauf aufmerksam, daß man zwei zu einer Zahl setzte, und eben so viel wieder wegnahm, und dann, was für eine Zahl man durch diese Veränderung erhielt.

Die Reihenfolge der Uebungen ist diese:

a) Es werden zu einer jeden Zahl von eins bis acht (denn über die zehen hinaus gehen wir nicht,) noch zwei gesetzt. Dann wird zeigend gesprochen: Eins und zwei, zwei und zwei, drei und zwei, vier und zwei, fünf und zwei u. s. f. bis acht und zwei.

b) Der Zögling orientirt sich sodann in den Zahlen, und zeigt, wo eine jede Zahl mit zwei zusammengesetzt sey. Diese Verhältnisse müssen zunächst an ein Lokale gebunden seyn, weil man dadurch dem Gedächtnisse zu Hülfe kommt, und auch

zugleich gegen jeden Irrthum und Mißverstand das Kind verwahrt. Es ist daher kein geringer Vortheil, wenn man einer jeden Zahl sogleich einen bestimmten Ort anweiset.

c) Jetzt wird die aus dieser Zusammensetzung entstehende Summe genannt, indem man ebenfalls Einzelne zu jeder Zahl zählt; also: drei, vier, fünf, sechs u. s. f.

d) Diese Verbindung wird mit dem Product zusammen genannt. Also 2 und 2 ist 4; 3 und 2 ist 5; 4 und 2 ist 6.

Man merke aber, daß diese Verbindung in dieser Ordnung so geübt seyn muß, daß sie ganz bestimmt auswendig hergesprochen werden kann. Das äußere Ansehen der Maschine muß dadurch, daß der Zögling sich gewöhnt von ihr weg zu sehen, und die allgemeinen Verhältnisse nur zu denken, zur innern Anschauung reifen. Ueberall muß gleich eine jede Zahl vor der Seele des Schülers stehen.

Ganz dieselben Uebungen und dieselbe Stufenfolge behalte man auch bei allen übrigen Zahlen bei. Bei der Eins fängt man allezeit an; man zählt dann weiter, und zwar so, daß man zuerst von Einer zu Einer fort zählt, wodurch man zuletzt die ganze Summe als Resultat erhält. Kann bei der nachmaligen Frage ein Schüler nicht fertig antworten, so läßt man sogleich von eins zu eins zählen, bis er die Zahl selbst gefunden. Gesetzt er wisse nicht, wie viel bleibt, wenn von neun drei genommen werden, so läßt man eiligst zurückzählen: Neun, acht, sieben, sechs.

Nun fragt man: Wie viel waren erst da? Antw. 9. Wie viel nahmst du von 9? Antw. 3. Wie viel bleibt noch? Antw. 6. Wenn man also 3 von 9 nimmt, wie viel bleibt? Antw. 6 *).

*) So zweckmäßig die Fragemethode ist, wenn die vorigen Uebungen so eingerichtet ist, daß die Sache schon vorher natur-

Nachdem auf diese Weise eine ganze Uebersicht der einfachen Zahlen und ihrer Zusammensetzung gegeben ist, ist es nöthig, daß man auch eine jede Zahl einzeln auffasse, um zu zeigen, wie viele mögliche Zusammensetzungen sind. Diese Uebung ist im Grunde die Wiederholung aller vorhergehenden nur in Beziehung auf eine Zahl gefaßt. Das Kind wußte schon, welche Zahl entsteht, wenn gewisse gegebene Zahlen verbunden werden; aber noch fehlte ihm die Uebersicht, welche mögliche Zusammensetzungen auch bei einer jeden einzelnen Zahl vorkommen, und welches die einzelnen Bedingungen sind, unter welchen sie sich erzeugt. Dieß mußte aber noch geübt seyn, wenn man eine vollständige und in aller Hinsicht klare Uebersicht des Ganzen haben wollte.

Man setzt also zuerst 2 hin, und spricht: die 2 ist zusammengesetzt aus eins und eins; 3 ist zusammengesetzt aus eins und eins und eins, oder: die Drei ist dreifach zusammengesetzt; die Vier ist zusammengesetzt aus eins, eins, eins und eins, oder vierfach zusammengesetzt; diese Uebungen schließen, des Folgenden wegen, mit 5 u. s. f.

b) In der zweiten Stufe setzt man alle Zahlen wieder so auf; nur mit dem Unterschiede, daß eine Zwei, anstatt der Eins, genommen wird. Nun ist darauf hin zu deuten, daß nun eine jede Zahl eins

gemäß und in einer gehörigen Stufenfolge gelernt ist. Sobald aber die Fragen den Anfang machen sollen, so ist eben dadurch immer vorausgesetzt, daß dieser schon gemacht sey. Dann würde weder die Ordnung, noch die Stufenfolge sich in des Kindes Seele einprägen, wie es sollte. Das Kind hält nicht den Zusammenhang der Uebungen und Verhältnisse fest, und erhält immer nur Bruchstücke von Anschauungen. Wir aber legen auf Bruchstücke, so brillant sie auch scheinen mögen, durchaus wenig oder vielleicht keinen Werth. Der Zusammenhang in dem Geiste des Kindes selbst ist uns Hauptsache; das System, welches sich in seiner Lückenlosigkeit ihm darstellt, ist es vorzüglich, das wir suchen.

weniger zusammengesetzt seyn müsse. Man setzt also die Zwei oben an, und spricht: zwei ist nur einmal da, oder ist ungetrennt. Drei ist zweifach zusammengesetzt, aus 2 und eins. Die Vier ist dreifach zusammengesetzt, aus 2 + 1 + 1. Die Fünf ist vierfach u. s. f. bis zuletzt die Zehn ist neunfach zusammengesetzt.

c) Die dritte Uebung wird ganz auf dieselbe Weise mit der Drei verfahren, und natürlich auch diese auf ebendieselbe Weise zur Deutlichkeit bringen. Der Schüler wird sehen, daß jetzt die Vier zweifach, die Fünf dreifach, die Sechs vierfach u. s. f. zusammengesetzt erscheint.

Es bedarf wohl kaum meiner Erinnerung, daß bei der vierten Uebung die Vier, bei der fünften die Fünf u. s. f. oben angesetzt, und ganz nach demselben Model behandelt werden muß.

Hierdurch lernt der Schüler einsehen, wie die Zusammensetzung sich ändert, wenn eine Zahl sich ändert. Es können sich aber auch zwei und mehrere Zahlen verändern, ohne daß die Summe sich deshalb vermehrt oder vermindert. Z. B. bei der dritten Uebung war die Zahl 4 zweifach zusammengesetzt, aber nur aus drei und eins. Jetzt ist zu zeigen, daß sie auch aus zwei und zwei zusammengesetzt seyn kann. Es werden also hier alle mögliche Zusammensetzungen der Zahl 2 vorgenommen. Anstatt daß vorher nur eine zusammengesetzte Zahl den andern verliehen wurde, so werden ihr jetzt zwei und mehrere gegeben. So erscheint die Vier getheilt in 2 und 2. Es müssen sich von vier bis zehn in einer jeden Zahl zwei Zweier finden.

Man nimmt diesemnach zwei Zweier, und setzt sie so zusammen: 2 + 2 = 4. Die Vier ist zusammengesetzt aus 2 und 2; die Fünf besteht aus 2 + 2 + 1; sechs aus 3 Zweier; die Sieben aus

3 Zweier und 1, ist also vierfach zusammengesetzt, u. s. f.

Die folgende Stufe wählt zu derselben Uebung die Drei, und fängt folglich mit sechs an, so wie die Vier mit acht beginnen muß. Die letzte Uebung wird mit Fünf gemacht, weil zwei Fünf schon zehn ausmachen. Auf diese Weise hat man eine jede Zahl so vielfach zusammengesetzt, als möglich. Es sind nun nur noch die Bedingungen nachzuweisen, unter welchen sich diese Zusammensetzungen fanden. Es muß daher jetzt gefordert werden, daß irgend eine gegebene Zahl zwei-, drei- oder mehrfach zusammengesetzt seyn soll; nun werden die möglichen Fälle durchgegangen, unter welchen Abänderungen dieß geschehen kann. Man setzt hier so viel Einer auf, als die Zahl Theile haben soll, und deutet dadurch die Zusammensetzung an. Nimmt man zweifach, so kann man einer Zahl entweder alle Zahlen, welche noch hinzukommen können, verleihen, oder man kann sie unter beide gleich oder ungleich vertheilen. Man setzt zuerst zwei an, wozu noch eins kommt. Eine Eins kann nicht vertheilt werden; sie muß also einer dieser beiden Einer gegeben werden. Um diese Eins vermehrt sich der Inhalt, und diejenige Eins von den beiden schon vorhandenen Einern, welcher die obige Eins zugesellt wurde.

Es bestünde demnach die Drei aus zwei Zahlen, aus einem Zweier und einem Einer. Darauf setzt man zwei zu. Hier können schon zwei Fälle Statt finden. Man kann nämlich alle beide gleich einem der gegebenen Einer verleihen; oder man kann beide vertheilen, so daß zwei und zwei zusammenkommen. Die Vier kann also zusammengesetzt seyn aus $3 + 1$, oder $2 + 2$.

Nach der Zwei nimmt man Drei, und behandelt sie auf dieselbe Weise. Man kann sie entwe-

der einer der gegebenen Zahlen, oder beiden vertheilt, geben. Beides thut der Lehrer, und zeigt dem Schüler, daß im ersten Falle 4 + 1, im zweiten aber 3 + 2, oder, welches ganz einerlei ist, 2 + 3 seyn müssen.

Man fordert nun, daß den beiden vier gegeben werde. Man legt abermals zuerst alle vier zur ersten Eins; dann entsteht 5 + 1. Hierauf theilt man die Vier selbst in 3 + 1, und giebt dann 3 der ersten, und 1 der zweiten Eins, so entsteht 4 + 2. Man theilt dann die Vier in zwei gleiche Theile in 2 + 2, und giebt eine Zwei der einen, und die andere der zweiten Eins; dann sind die Theile 3 + 3. Die Summe ist natürlich bei allen Zusammensetzungen 6.

Man versäume nicht, hier den Zögling darauf aufmerksam zu machen, daß nun zum erstenmale dreierlei Zusammensetzungen möglich sind.

Es versteht sich auch hier von selbst, daß man diese Uebung so lange fortsetzen müsse, bis das Product die Zahl zehn erreicht.

Nach dieser Stufe setze man drei Einer hin, und gehe diese genau eben so durch, wie die Zwei; so daß man zuerst eins, dann zwei u. s. f. dazu thut. Hier giebt die Drei natürlich den Maßstab, so wie es vorher die Zwei war. Dasselbe erfolgt mit vier- und fünffachen Zusammensetzungen. Mehrere derselben sind mit keiner Zahl unter der zehn möglich.

Der Nutzen dieser Uebungen ist unermeßlich, weil dadurch die einfachen Zahlen zu einem so deutlichen Bewußtseyn gebracht werden, daß durchaus nichts Bemerkbares mehr übrig bleibt, was nicht bemerkt wird. Jede Zahl wird durch alle mögliche Arten von Verbindungen durchgeführt. Der Schüler muß nun wissen, was bestimmt zu einer Zahl gehört, und muß, wenn er einen Theil

hat, den unbekannten andern, welcher zu einem Ganzen noch erforderlich ist, mit Leichtigkeit und Sicherheit finden. Er muß aber auch einen jeden beliebigen Theil finden, sobald das Ganze gegeben ist, und die Bedingung, welcher die Theile unterworfen sind. Man lasse sich durch die Langsamkeit, mit welcher diese Uebungen betrieben werden müssen, nicht gegen sie einnehmen. Das Resultat ist hierbei nicht so groß, als der rein praktische Gewinn, der sich vorzüglich in der Leichtigkeit und Schnelligkeit, mit welcher die nachfolgenden Uebungen betrieben werden können, offenbaren wird. Freilich wird unser Zögling ein Beveutendes länger hingehalten werden, ehe er sich über die Zahl zehen hinaus heben kann, als ein jeder andere. Aber an Deutlichkeit und Bestimmtheit wird er desto mehr sich heben; er wird dafür alle folgende Uebungen mit desto größerer Schnelligkeit fassen; und, was das Hauptsächlichste ist: er wird sich an eine Gründlichkeit und Bestimmtheit gewöhnen, daß er überall unbefriedigt bleiben wird, wo er diese vermißt, und auf diese Weise auch in Ansehung des Umfassenden einen anders geleiteten Schüler bald genug ereilen.

Noch eine Uebung mit den Einheiten wird nöthig seyn, die auf das Verhältniß der Mehrheit, in welchem alle Zahlen mit einander stehen, aufmerksam macht. Es wird hier also gezeigt und gesagt, wie viel eine jede Zahl mehr oder minder sey, als die andere. Man setzt zunächst einen Zweier, und dann einen Einer hin. Dann spricht man zeigend: zwei ist eins mehr, als eins, und eins ist eins weniger, als zwei. Weiter setzt man Zweier und Dreier zusammen, und sagt nun: drei ist eins mehr, als zwei, und zwei ist eins weniger, als drei. Dann stellt man vier und drei zusammen, zeigt und spricht eben so, bis man zur Zehn gelangt.

Auch diese Uebung wird dann ganz auf dieselbe Weise mit einer jeden andern Zahl wiederholt.

Bei allen diesen Uebungen merke man sich in Ansehung des methodischen Ganges folgendes:

a) Der Lehrer spreche bestimmt vor, was er zeigt, und lasse sich alles Vorgesprochene eben so bestimmt nachsprechen.

b) Er frage dann eben so bestimmt ab, was er vorgetragen hat, und fordere eine deutliche, bestimmte Antwort. Eine unbestimmte, imprompte Antwort ist allezeit ein Beweis, daß der Gegenstand noch nicht deutlich gefaßt, sondern noch verworren nur vorschwebe. Wer in seinem Lande einheimisch ist, der weiß sich augenblicklich zu orientiren, und bedarf des mühevollen Suchens nicht.

c) Er gehe eben deswegen durchaus nicht von einer Uebung weg, bis sie ganz vollständig aufgefaßt ist, und nichts mehr übrig läßt. Durch das langsame extensive Vorschreiten lasse er sich nicht irren, die intensiven Progressionen gedeihen desto besser. Die Erfahrung lehrt es beim Elementarunterricht durchaus: daß der nur recht Fortschritte zu machen pflegt, der das Zaudern versteht und richtig anwendet.

d) Er lasse jederzeit die Schüler zuletzt die gesammte Uebung in dem ganzen Zusammenhange, in welchem er sie gab, wiederholen, damit nicht nur einzelne Brocken hängen bleiben, sondern das Ganze mit Klarheit und Deutlichkeit dem Kinde immer vorschwebe, und in ihm gleichsam sich zu einem System bilde.

Sobald die einfachen Zahlen auf diese Weise behandelt seyn werden, so läßt sich leicht die Anwendung auf die zusammengesetzten machen. Man zählt sich dazu zuerst die Zehner oder Zig, und

stellt sie der Reihe nach auf, indem man mit ihnen zählt und umgeht, wie mit Einern.

Nachdem auf diese Weise die Anordnung und Uebersicht bis hundert gegeben ist, so lernt man die Einer auffassen, die unter den Zig mit begriffen sind, und zählt dann die Einer in Beziehung auf sich so fort. Man setzt zuerst ein Zig hin, und daneben einen Einer, und zählt ein Zig und eins, oder 11; ein Zig und 2, oder 12; ein Zig und 3, oder 13 u. s. f. Sobald dieß zweite Zig wieder seine zehn Einer empfangen, so zählt man es natürlich nicht mehr zu den Einern, sondern zu den Zig. Wenn also die zweite Reihe ihre zehn Einer hat, so nennt man sie Zig, und zählt dieß zu dem ersten: Zig und Zig macht zwei Zig. Jetzt muß man natürlich zählen zwei Zig und eins, oder ein und zwanzig; zwei Zig und zwei, oder zwei und zwanzig u. s. f. Ist dieß bis auf Hundert geschehen, so nennt man irgend eine zusammengesetztere Zahl, und fragt alsdann: wie viel Einer, wie viel Zig sie enthalte? z. B. 53 ist 5 Zig und 3 Einer, so kommt diese Zahlenordnung zum bestimmten Bewußtseyn, und der Zögling wird sich des Geschehenen erinnern, sobald irgend eine höhere Zahl genannt wird.

Auf der zweiten Stufe dieser Uebungen *) wendet man diese Ordnung an, indem man mehrere ein Zig übertreffende Einer zusammen bringt, und nun sieht: wie viel Einer, wie viel Zig da sind. Man zeigt zuerst dem Kinde, daß die Summe zehn, oder Zig, durchaus eine Reihe schließen müsse. Dann setzt man zuerst 9 hin, und spricht: bis Zig fehlt noch eins. Man setzt das Eine hin, und läßt es Zig aussprechen. Jetzt nimmt man 2 zu 9, und spricht: 9 und 1 ist Zig; (diese Eins nimmt man von der Zwei, welche mit 9 verbunden werden soll;) eins von 2 bleibt eins; (diese Eins wird dann in

*) Vergl. S. 16, §. 6.

die zweite Reihe gesetzt;) Zig und eins ist 11; also 9 und 2 ist 11. Jetzt zählt man weiter: 9 und 3 ist Zig und 2; 9 und 4 ist Zig und 3, oder 13, u. s. f. Ein Einer muß allezeit von der letzten Zahl zurückgezogen werden: 9 und 9 ist 10 und 8, oder 18.

Es ist nicht nöthig, daß bei allen einzelnen Zusammensetzungen wiederholt wird, was man bei der ersten zeigen und sprechen mußte; vielmehr wird es besser gedeihen, wenn man das Hinwegnehmen des Einers, und das Hinzuthun desselben zur 9 Sache der Anschauung seyn läßt. Man zähle also nur simpel fort, wie es angegeben ist, und zeige bei jedem das Verhältniß nach, so wird man gewiß seinen Zweck nicht leicht verfehlen.

Nachdem die 9 auf diese Weise behandelt ist, so geht man über auf 8. Man läßt bemerken, daß hier bis Zig zwei fehlen, und daß folglich einer jeden Summe von Einern, welche zu 8 sich gesellen sollen, diese 2 entzogen werden müssen, um dem Zig untergeordnet werden zu können. Man sagt hier 8 bis Zig fehlen 2; 8 + 3 ist Zig und eins. Um eine Uebersicht der Behandlung zu geben, so schließt man hier gleich die Sieben an, indem man zeigt, daß zu ihr noch drei gehören, um die Zehn, oder das Zig, zu erreichen. Man thut dasselbe mit der Sechs, die noch vier Einer verlangt, und zuletzt mit 5, die 5 fordert, um 10 zu seyn, die aber durchaus keiner besondern Uebung mehr bedarf, weil sie in den vorhergehenden Zusammensetzungen schon vorhanden gewesen ist. Nun zählt man auf obige Weise eine jede beliebige Anzahl von Einheiten zur 8, zur 7, zur 6. Der Zögling wird, wenn er 8 sieht, von der zweiten Zahl allezeit zwei, wenn er sieben bemerkt, drei u. s. f. zurückzählen; und da diese Uebungen schon vorher so vielfältig bearbeitet sind, so ist dieselbe sehr bald vollbracht.

Ist dieß der Fall, so verdoppelt man dieselben Uebungen, indem man mehrere Zig und Einer gleichförmig mit einander verbindet. Man nimmt zuerst 11, und setzt dazu noch 9, dann werden es zwanzig; denn 11 ist eins mehr, als Zig, und 9 ist eins weniger, als Zig; eins zu neun wird Zig, und eins von 11 bleibt Zig; 10 + 10 ist 20. Man setzt nun 12 und 8, 13 und 7, 14 und 6, 15 und 5, 16 und 4, 17 und 3, zusammen. Alle diese Zahlen geben 20, indem überall die Summe bleibt, und nur die Stellung derjenigen Zahlen, welche sie machen, sich verändert. Man nimmt, um auch dieses recht anschaulich zu machen, von der Neun, welche zu der 11 gegeben war, eins hinweg, und gesellt sie zu 11, so erhalten wir 12 und 8. Von der 8 nimmt man dann wieder eins, und fügt es der 12 bei, so empfängt man 13 und 7 u. s. f. Jetzt geht man von 19 aus, und setzt erst eins, dann 2, 3 u. s. f. dazu, wie bei 10. Man versucht dasselbe mit 18, 17. Da aber gewöhnlich dieß sehr bald gefaßt wird, so hat man selten nöthig, alle einzelne Uebungen durch zu nehmen.

Nun stellt man erst zwei Zig hin; aber so, daß immer noch zwischen denselben Einer hingestellt werden können. Nun zählt man zu jedem Zig erst eins, dann zwei, dann drei u. s. f. Z. B. 11 + 11 löst man so auf: Zig und Zig ist zwei Zig; eins und eins ist zwei; 2 Zig und 2 ist 22. 12 + 12 wird aufgelöst: Zig und Zig ist 20; 2 + 2 ist 4; 20 + 4 = 24 *).

Einige Aufmerksamkeit wird noch erfordert, um mehrere Zig und mehrere Einer, die schon mit Zig verbunden sind, hinwiederum mehrfach zu verbinden, und als Zig den Zig beizugesellen.

Der Lehrer stellt hier zunächst 15 + 15 auf. Man läßt dann die Zig und die Einer mit einan-

*) Vergl. S. 17.

der verbinden: Nun machen 5 + 5 wieder 10 zusammen, und diese zu 20, giebt 30. Der Lehrer seze hierauf 15 + 16 hin. Setzt er zu den 5 noch 6 hinzu, so wird dann diese noch um eins mehr werden, als Zig. Diese Eins wirt bei der Zusammenstellung auch über die Zig hinausreichen, und eben deswegen auch diese Operation versinnlicht erscheinen.

Sind zwei Zahlen gegeben, so verfahre man überhaupt so: Man stellt zuerst die erste Zahl allein zusammen; jedoch so, daß in einer Reihe nie mehr als Zig sind. Z. B. bei 37 stellt man drei Zig und sieben darunter. Eben so stellt man auch die andere Zahl so zusammen. Z. B. 45. Jetzt stellt man die fünf Einer zu den obigen sieben Einern, und sieht, daß diese ein Zig und 2 machen. Man sieht und spricht: 30 + 40 = 70; 70 und 1 Zig ist 80; 80 und 2 ist 82. Es bedarf nur eines einzigen Beispiels, und dieß so deutlich als möglich durchgeführt, so werden mit großer Leichtigkeit die übrigen alle nach ebendemselben Typus gebildet.

Als Anhang zu diesen Uebungen betrachte man das Zifferlesen. Jedoch gehe man noch nicht weiter, als die Uebungen, welche man bisher anstellte, führten. Man schreibe die Zeichen nur hin, und sage ihren Werth, so wird man nach diesen Vorübungen nicht zu fürchten haben, daß Dunkelheiten zurückgeblieben seyen. Vielmehr wird man sehen, daß die Kenntniß der Ziffern das Werk höchst weniger Uebungen sey. Man mache nur erst mit der Sache sich vertraut, so findet sich von selbst das Zeichen. Man kann dieses dann nur bald dahin bringen, wenn man sich hütet, die Stufenfolge zu verletzen. Man wird sich daher auch sorgfältig hüten, früher schriftliche Rechnungen anzufangen, als die rein abstracten Verhältnisse der Zahl voll-

ständig gefaßt sind; sonst sinkt man herab zum Mechanismus, mit dem man zwar rechnen, aber nimmer denken, blindlings Resultate finden, aber weder sich selbst, noch andern, deutlich darthun kann. Eben so wird man auch das weitere Zahlenlesen bis dahin versparen, wo man höhere Zahlenordnungen hat auffassen lernen. Die Ziffern sind nur Zeichen der Zahl; sie können daher auch nicht früher dem Kinde bekannt gemacht werden, als sie ihm selbst geläufig sind; sonst irrt man eben so sehr, als wenn jemand ein Kind, das noch nicht sprechen kann, die Buchstaben kennen lehren wollte. Bei den Ziffern ist aber nur zweierlei zu beobachten: zuerst ihr Werth, und dann die Stelle, auf welcher sie sich befinden. Das erste, was geschieht, ist: Man sagt die einfache Zahl, welche irgend eine Ziffer bezeichnet. Man schreibt am besten diese Ziffern nach einander an die Tafel, und läßt sie der Reihe nach lernen. Dann zeigt man auf eine leere vor der einfachen Ziffer sich befindende Stelle, und sagt, daß diese allezeit Zig bedeute. Auf diese Stelle schreibt man willkührlich einige Ziffern hin, die der Schüler als Zig aussprechen wird. Man setzt dann vor Zig hinwiederum eine neue Zahl, welche die Bedeutung der Hunderter hat, ganz nach der in der zweiten Abtheilung gegebenen Anleitung zum schriftlichen Rechnen (S. 227 bis 231.), die ausführlich genug ist, um mich der weitern Ausführung zu überheben.

Bisher wurden die Zahlen nur geordnet, und in Klassen gebracht; aber noch keineswegs als Verhältnisse aufgefaßt. Dieß aber soll nun eingeleitet werden. Der erste Schritt dazu geschieht durch das Auffassen mehrerer zusammengesetzter Zahlen als Einheiten. Wenn vorher davon die

Rede war, wie eine jede größere Zahl zusammengesetzt war, so führt uns die gegenwärtige Uebung dahin, zu beachten, wie viel mal irgend eine zusammengesetztere Zahl vorhanden, und welches ihr Inhalt sey. Hier werden die vorigen Uebungen allesammt wiederholt, und die neue Uebung lenkt nur die Aufmerksamkeit noch auf eine neue Seite hin. Es findet hier ein doppeltes Zählen Statt, der Einer und der zusammengesetzten Zahlen. Man setzt zuerst einen Zweier, und dann noch einen Zweier an. Der Zögling wird zunächst zählen 2, 4. Mehr Zweier sind hier nicht nöthig, wie gleich weiter gezeigt werden soll. Man zeigt nun die erste Zwei und spricht: ein mal zwei; darauf deutet man auf die andere Zwei, indem man wiederum spricht: ein mal zwei; ein mal zwei und ein mal zwei ist zwei mal zwei. Man fährt fort: zwei und zwei ist vier; vier ist zwei mal zwei.

Man nimmt dann die Drei und setzt sie in folgender Ordnung zusammen:

1) $3 + 3 = 6$; $6 + 3 = 9$.

2) Ein mal drei, zwei mal drei, drei mal drei.

3) Drei ist ein mal drei,
6 ist zwei mal drei,
9 ist drei mal drei.

Nun umgekehrt:

4) $1 \times 3 = 3$, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 3 = 9$.

Ehe ich weiter fortschreite, will ich gleich die Zweifel heben, die ich entstehen sehe: Man wird sich nämlich wundern, daß ich diese Uebungen so zu vervielfältigen scheine; allein dieß liegt in der Natur der Sache. Es faßt wirklich das sogenannte Ein mal eins diese Uebungen in sich, und setzt sie voraus. Daher wurde es uns eben so schwer dasselbe zu lehren, weil es eben gelernt werden sollte, ehe jede der einzelnen Uebungen für

sich

sich deutlich war. Ungeachtet dieses, bis auf die letzte Uebung, wo nämlich darauf geachtet ist, wie viel mal eine jede einzelne Zahl vorhanden sey? nur Wiederholung des Vorhergehenden ist, so darf es dennoch nicht unbeachtet bleiben, weil gerade hier das zusammengestellt ist, was zu diesen Uebungen wesentlich gehört. Darauf beruht eben hauptsächlich der methodische Gang, daß nichts anticipirt, nichts übersehen wird, was eine Lücke machen kann.

Ich gehe nun die einzelnen Uebungen durch, damit nichts versäumt werde, welches hier nicht ohne großen Nachtheil geschehen kann, wie die folgenden Uebungen zeigen werden, die sich insgesammt darauf stützen.

4.

1) $4 + 4 = 8$; von 8 bis 10 fehlen 2; von 2 bis 4 fehlen 2; 2 zu 10 sind 12.

[Es muß nämlich hier die Vier abgebrochen werden, weil die dekadische Ordnung nicht verletzt werden darf, wenn es noch darauf ankommt, die Summe der Einer wahrzunehmen, welche aus dieser Zusammensetzung entsteht. Dessen ungeachtet muß auch ein Fortschreiten der Vier Statt finden; um dieß nun recht zu veranschaulichen, so setzt man zu 8 noch 4, und zeigt, daß hier 2 mehr als 10 seyen. Da der Schüler schon aus dem Vorhergehenden weiß, daß eine Reihe nicht mehr als 10 duldet, so wird er sogleich selbst darauf kommen, diesen Ueberschuß neben das Zig hinzustellen, und als Zig und zwei, oder 12, auszusprechen. Man setzt noch eine 4 hinzu, welche mit der 2, die schon neben dem Zig steht, 6 bildet, und es steht auf diese Weise 16 vor Augen, als die ganze hieraus entstandene Summe. Nun geht man ganz zu Werke, wie vorher.]

2) 4 ist ein mal vier; 8 ist 2×4; 12 ist 3×4; 16 ist 4×4.

3) $2 \times 4 = 8$; $3 \times 4 = 12$; $4 \times 4 = 16$.

Man braucht also zu dieser Aufstellung der Vier 3 Vierer und 2 Zweier.

5.

Man stellt hier lauter Fünfer hin, die man zuerst, wie vorher, addirt.

a) $5 + 5 = 10$; $10 + 5 = 15$; $15 + 5 = 20$; $20 + 5 = 25$. So steht die Fünf und zwanzig aus 5 Fünfen, die 20 aus 4, die 15 aue 3, die 10 aus 2 Fünfen gebildet vor Augen. Man macht nun darauf aufmerksam, wie viel mal sie bei jeder Zahl vorhanden sey. Man zählt:

b) 1×5, 2×5, 3×5, 4×5, 5×5.

c) $10 = 2 \times 5$; $15 = 3 \times 5$; $20 = 4 \times 5$; $25 = 5 \times 5$.

d) $2 \times 5 = 10$; $3 \times 5 = 15$; $4 \times 5 = 20$; $5 \times 5 = 25$.

Bei der Fünf bedarf es keiner Abbrechung, wie bei allen übrigen Zahlen, weil je zwei und zwei immer ein Zig ausmachen.

6.

Man nimmt zuerst einen sechs Zoll langen Stab, stellt ihn vor die Augen des Schülers, und spricht: von 6 bis 10 fehlen 4; (man stellt diese 4 hin;) 4 und 2 ist 6; (man stellt die 2 neben die 4;) 10 und 2 ist 12; (dieß spricht man, indem man die 2 wegnimmt von dem ersten Zig, zu welchem man dieselbe erst gestellt hatte, und in die zweite Reihe setzt, so, daß der Schüler nun Zig und 2 vor sich sieht;) 12 und 6 ist 18; von 18 bis 20 fehlen 2; (der Lehrer stellt diese 2 hin;) 2 und 4 sind 6; (diese sechs werden zuerst zusammengestellt, und dann wird die Vier gesondert in die dritte Reihe gesetzt;) 20 und 4 ist 24; 24 und 6 ist 30; 30 und 6 ist 36.

Es erfolgen nun alle Uebungen wie bei der 5; nämlich es wird gezeigt, wie viel mal die 6 vorhanden sey? wie viel jedes betrage? und dann, wie viel so und so viel mal sechs Einer ausmachen.

7.

Diese Zahl wird folgendermaßen zusammengesetzt:
1ste Reihe: 7 + 3; (zu der zweiten Sieben fehlen noch 4, die in die 2te Reihe kommen.
2te Reihe: 4 + 6; (zur dritten 7 fehlt 1.)
3te Reihe: 1 + 7 + 2; (21, 28, 30.)
4te Reihe: 5 + 5; (35.)
5te Reihe: 2 + 7; (42, 49.)

Zur Zusammensetzung der Progressionen mit 7 werden gebraucht: 3 Siebener, 1 Sechser, 2 Fünfer, 1 Vierer, 1 Dreier, 2 Zweier, 1 Einer.

Die übrigen Uebungen erfolgen auch hier in der obigen Ordnung und Stufenfolge wieder.

8.

1ste Reihe: 8 + 2; (1 × 8.)
2te Reihe: 6 + 4; (2 × 8 = 16 + 4 = 20.)
3te Reihe: 4 + 6; (3 × 8 = 24 + 6 = 30.)
4te Reihe: 2 + 8; (4 × 8 = 32 + 8 = 40.)
5te Reihe: 8 + 2; (6 × 8 = 48 + 2 = 50.)
6te Reihe: 6 + 4; (7 × 8 = 56 + 4 = 60.)
7te Reihe: 4; (8 × 8 = 64.)

Gebraucht werden 3 Achter, 3 Sechser, 4 Vierer, 3 Zweier; die übrigen Uebungen erfolgen wie vorher.

9.

1ste Reihe: 9 + 1; (9 = 1 × 9 + 1 = 10.)
2te Reihe: 8 + 2; (18 = 2 × 9 + 2 = 20.)
3te Reihe: 7 + 3; (27 = 3 × 9 + 3 = 30.)
4te Reihe: 6 + 4; (36 = 4 × 9 + 4 = 40.)
5te Reihe: 5 + 5; (45 = 5 × 9 + 5 = 50.)
6te Reihe: 4 + 6; (54 = 6 × 9 + 6 = 60.)
7te Reihe: 3 + 7; (63 = 7 × 9 + 7 = 70.)
8te Reihe: 2 + 8; (72 = 8 × 9 + 8 = 80.)
9te Reihe: 1; (81 = 9 × 9.)

Daß die Neun von allen übrigen Uebungen keine Ausnahme machen kann, versteht sich von selbst.

Man sieht, daß hier überall drei verschiedene Uebungen verbunden sind. Die erste besteht in der doppelten Beziehung der kleinern Zahlen, nämlich zunächst auf die Zahlenordnung oder die Summe, welche durch eine bestimmte Zusammensetzung entsteht, und auf die zusammengesetzte Zahl selbst, die man diesen Uebungen zum Grunde legte. Die zweite besteht in dem Auffassen desjenigen, wie viel mal irgend eine Zahl vorhanden ist; und die dritte endlich, welche Summe sich aus der so viel mal wiederholten Zahl ergiebt.

Man merke sich hier folgendes: Diese Uebungen dürfen durchaus nicht eher verlassen werden, bis sie in ganzer Umfassung dem kindlichen Gemüthe eingedrückt sind; sie müssen zu einer so unbedingten Fertigkeit gebracht seyn, als selbst das einfache Zählen; denn ihr Einfluß auf alle folgende Uebungen ist unermeßlich.

Man gehe nun eben deswegen langsam und mit Umsicht zu Werke, und hüte sich, die hier aus gutem Grunde gesondert angegebenen Uebungen zu vermannigfaltigen. Vieles auf einmal erreichen wollen, heißt nichts Bestimmtes suchen, und dann ist es ein günstiges Ungefähr, ein Glücksfall, wenn man etwas Bestimmtes findet.

Man lasse allezeit, wenn eine Zahl vollendet ist, die vorhergegangenen noch einmal wiederholen, um immer einen Umriß des Ganzen zu haben.

Wenn eine Uebung vollendet ist, so lasse man den Schüler sich hinwegwenden von der sinnlichen Anschauung; verlange aber, daß er mit gleicher Bestimmtheit dennoch auch eben so alles wisse und spreche, als wenn er seine Augen auf den Aufbau der Zahlen gerichtet hätte.

Es ist noch ein wesentlicher Theil dieser Uebungen, zu zeigen, wie eine jedesmalige Wiederholung einer größern Zahl durch eine kleinere dieselbe Sum-

me giebt, als wenn dieselbe kleinere Zahl durch eine größere wiederholt würde.

Auch diese Uebungen können durch die Rechenmaschine auf das beste versinnlicht werden. Nachdem man es nämlich bis zu derjenigen Klarheit gebracht hat, daß der Schüler bestimmt weiß, wie viel mal 6 zur 24 oder einer andern Zahl gehören, oder wie viel die aliquote Wiederholung der einen Zahl betrage, so fängt man jetzt wieder von vorn an, und setzt nun nicht mehr die Zahlen in dekadischer Ordnung hin, sondern man nimmt von den Stäben für eine jede Zahl gerade so viel, als man braucht, und stellt sie neben einander. Zunächst nimmt man abermals Zweier: 1 × 2. Man zeigt auf die 2, und spricht: 1 × 2 ist 2 × 1; denn so steht es vor Augen. 2 × 2 ist überall angesehen 2 × 2. Man stellt 1 × 3, und zeigt nun wieder an den Hölzern nach, daß dieß auch 3 × 1 seyn müsse. Jetzt wird 2 × 3 hingestellt. Da zwei Dreier genau neben einander stehen, so werden auch immer je zwei und zwei zusammen kommen; und da auf jeder Drei Einer sind, so müssen natürlich auch drei Zweier neben einander stehen. So sieht man, daß 2 × 3 auch zugleich ist 3 × 2. Setzt man nun noch ein mal 3 hin, so hat man von allen Seiten angesehen drei, nämlich je drei und drei Einer über, und eben so viel neben einander, oder das Quadrat.

Dasselbe auf die Vier angewendet. Der erste Blick giebt es, daß ein mal Vier und vier mal Eins in Ansehung des daraus entstehenden Productes völlig gleich sey. Stellt man nun zwei mal vier hin, so sieht man auch 4 × 2; stellt man drei mal vier, so bemerkt man 4 × 3; und setzt man noch ein mal vier, so nimmt man von allen Seiten 4 × 4 neben einander. Es bedarf nur eines geübten Blickes, um dieß sogleich zu sehen,

keineswegs eines längern Nachdenkens, um es zu erforschen.

Ich halte eine ausführlichere Beschreibung für überflüssig, da man dasselbe ganz rein und ohne Abweichung von der Regel auch auf alle andere Zahlen anwenden kann.

Man wird es auch finden, daß der Schüler die Abstraction mit äußerster Schnelligkeit macht, und von selbst einsieht, daß 8×9 auch zugleich seyn müsse 9×8, und eins wie das andere 72 betrage.

Die Uebung selbst ist übrigens S. 24 und 25 deutlich genug angegeben.

Es kann durch dieselbe Zusammenstellung der Zollstäbe auch deutlich gemacht werden, daß durch die Vertauschung der Multiplicanden und Multiplicatoren ein ganz anderer Multiplicator gefunden werden kann, ohne daß man nöthig hat, erst alle Einer zu suchen, und dann durch Division erst einen neuen Multiplicator zu finden, z. B. 3×5 und 3×3 lehrt alsbald auch finden, wie viel mal es 3 ist. Man stellt hier nämlich nur Dreier neben einander, und läßt sehen, daß 3×5 ist 5×3, und dieß mit 3×3 macht 8×3. Nun darf man nur die Reihe der neben einander liegenden Einer vergleichen, und man wird drei mal 8 sehen. Es ist also $5 \times 3 + 3 \times 3 = 3 \times 8$ (S. 25 h).

Setze man ein anderes Beispiel der Art (S. 25 d). Es sey aufgegeben 7×5 und 2×7, wie viel mal 7? Man wird hier 5 Siebener nehmen, und diese neben einander stellen; dadurch wird man von einer andern Seite angesehen auch sieben mal 5 erhalten haben. Diesen soll man, nach der Aufgabe, noch zwei mal sieben beigesellen; aber natürlich so, daß die gegebenen 7 Einer neben einander zu stehen kommen. Auf diese Weise erhält man dann 7×7, ohne daß es nöthig ist, erst die Einer zu,

sammen zu zählen, und dann erst zu sehen, wie viel mal die 7 in ihnen enthalten ist.

So behandelt man auch das nächstfolgende Beispiel (S. 25 e). Man setzt 6×8 hin, und zeigt acht mal sechs. Davon nimmt man der Forderung gemäß 4×8 weg, und es können nun natürlich nur noch 2×8 übrig bleiben.

Das Beispiel f erfordert ganz dieselbe Behandlung. Man muß auch hier 7 Achter hinlegen, diese von einer andern Seite ansehen lassen, wodurch sie 8×7 werden, und nun zeigen, daß wenn 5×8 davon genommen werden, nur 2×8 zurück bleiben.

Etwas verwickelter scheint das Beispiel g: $4 \times 5 + 5 \times 5$ ist 5×9. Allein dies ist nur den Worten nach der Fall; denn wenn man 4 Fünfer und 5 Fünfer neben einander stellt, so erhält man 9 Fünfer; man kehre dieß nur um, so sieht man 5×9 da stehen.

Das Beispiel i (S. 26) läßt sich ebenfalls sehr leicht vor die Augen legen. Man stelle nur gleich Vierer hin, indem man 4×3 in drei mal vier auflöset; diese sollen von 4×9 abgezogen werden; man sieht sogleich, daß man 4×9 in 9×4 umsetzen kann. Wenn man davon 3×4 nimmt, so erhält man noch 6×4; 6×4 kann man aber sogleich in 4×6 umkehren.

Man sieht, daß diese Uebungen durchaus Sache der Anschauung sind, und daß sie auch dahin abzwecken, die Anschauung zu fixiren und zu sichern. Der Lehrer muß aber vorzüglich dahin arbeiten, daß der Schüler nicht mehr des Sehens bedarf, um anzuschauen; das Aeußere muß durch allmähliche Gewöhnung durchaus in ein rein Inneres umgesetzt werden. Das Anschauen ist an sich schon etwas Inneres, weil dabei Vorstellungen vorausgesetzt werden; und wenn der Schüler im Stande ist, sich allenthalben sogleich ein Bild von dem zu

entwerfen, was in ihm vorgeht, so hat er sehr viel gewonnen für alle folgende Uebungen, weil man nun gewiß seyn kann, daß er im Stande ist, sich alles klar zu machen, was nur vorkommt, und auf keine Weise im Finstern zu tappen. Es ist dieß eine herrliche Uebung des Scharfsinnes, und giebt eine Gewandtheit für die folgenden Uebungen, die sehr viel werth ist; denn eben so leicht als hier z. B. 4×9 mit 5×4 verglichen werden kann ($9 \times 4 + 5 \times 4 = 15 \times 4 = 4 \times 15$), eben so leicht können nachher auch Viertel, Neuntel und Funfzehntel mit einander verglichen werden. Es ist also diese ohnehin sehr unterhaltende Uebung auch für die nachmaligen Combinationen sehr nützlich und wesentlich.

Zu dieser Uebung gehört noch, daß man nach der S. 6. gegebenen Anleitung den Schüler zu der Einsicht bringe, daß auch darin die Rechnung mit Zahlen höherer Ordnung keinen Unterschied mache, sondern immer gleich fortlaufe. Es ist nicht einmal nöthig, dieß zu veranschaulichen; die Analogie allein reicht hin, um die Wahrheit der Sache deutlich zu machen. Man frage nur zuerst die einfachen Zahlen nach, z. B. 2×3 ist 6; wie viel wird nun 2×3 Zig seyn? Antw. sechs Zig. Man gehe dieselbe Uebung mit einer oder wenigen Zahlen durch. Z. B. 3×9 ist 27; drei mal neun Zig muß also seyn sieben und zwanzig Zig; 20 Zig ist 200; 27 Zig ist 270. Das Uebrige ist oben S. 27 schon hinlänglich klar angegeben. Wer die kleinern Zahlen behandeln kann, dem fehlen auch die größern nicht; und wenn nur durch die vorigen Uebungen dem Schüler die Einer und Zig recht unterscheidbar geworden sind, dann wird er sich auch nicht verwirren lassen, wenn schon Einer und Zig in mannigfaltiger Abwechselung und Beziehung

neben einander stehen. Wenn der Lehrer z. B. fragt: 2 × 85? so werden ihm gleich 2 × 80 und 2 × 5, das sind 16 Zig und 10 Einer, oder ein Zig, also 170 vor Augen stehen u. s. w.

Man hat nun noch darzuthun, daß auch eine Erhöhung des Multiplicators gleichen Einfluß auf die Erhöhung des Productes haben muß. Man behandelt dieß aber so, daß man einen um eine Ordnung erhöhten Multiplicator erst mit einem einfachen Multiplicandus zusammenbringt. Z. B. 30 × 3 ist 90, so wie drei mal 30. Nun versucht man, wie viel wird nun 30 × 30 seyn? Natürlich 90 Zig, das sind 900. Dieß wird dem Schüler nicht sowohl durch mühsames Beweisen und Vordemonstriren, als vielmehr durch das Analogische, was darin so deutlich in die Augen springt, klar. Man geht, um dies recht zu befestigen, abermals von einfachen Zahlen aus zu immer zusammengesetztern über. Also:

5 × 6 = 30;
5 × 60 = 30 Zig oder 300;
50 × 60 = 300 Zig oder 3000;
6 × 6 = 36;
6 × 60 = 36 Zig oder 360;
60 × 60 = 360 Zig oder 3600.

Hier ist abermals wieder ein Zeitpunkt, an welchem das schriftliche Rechnen, oder die Anwendung auf Zahlzeichen, auf Ziffern nachgeholt werden muß. Denn wir stehen am Ziele derjenigen Uebungen, welche es mit einer bloßen Anordnung und richtigen Subsumtion der Zahlen zu thun haben.

Die Ansicht und der Gebrauch der Zahlen war bis jetzt schon mannigfaltig genug, um die Zahlenordnungen alle bekannt zu machen. Die Anleitung dazu ist S. 228 f. §. 2. ausführlich gegeben.

Ich füge hier nur noch hinzu, daß man vorzüglich darauf sehen muß, daß dem Schüler die Klassen recht deutlich werden. Man lasse ihn also die Zahlen einer jeden Ordnung bis 10 hinauf zählen:

1
2
3
4
5
6 } ooo
7
8
9
10

weil dadurch der Grund der decadischen Progression, als nothwendige Folge des Mangels einfacher Ziffern, hervorgeht.

Man geht hier alle Uebungen des schriftlichen Rechnens durch, bis zum Dividiren. Die Schriftrechnung muß immer nur als Hülfsmittel für das Gedächtniß angesehen werden, das nicht im Stande ist, eine allzugroße Zahlenreihe zu behalten. Es ist nur zu zeigen, auf welchem Wege man da sich helfen kann, und wie man jede Zahl einer höhern Ordnung gar nicht anders zu behandeln nöthig hat, als wie einfache Zahlen; das gilt bei allen sogenannten Species. Es muß natürlich auch hierin jede einzelne Uebung bis zur Fertigkeit gebracht werden, welches aber durchaus nicht schwer hält, wenn man nur einfache und zusammengesetzte Zahlen recht zu behandeln weiß. Der Grund, warum man immer hierin so lange aufgehalten wurde, lag in zwei Hauptursachen, deren erste war, weil nicht das Bedürfniß erzeugt wurde, mit größern Zahlen zu rechnen, da die kleinern noch nicht in genugsamer Beziehung aufgefaßt waren; die zweite war: man machte es nicht deutlich, warum so, und nicht anders, verfahren werden müsse; man gab die Re-

gel um des Resultates willen, und kümmerte sich wenig oder gar nicht um die Einsicht. Der Schüler gewöhnte sich allmählich daran, und fand natürlich an der Sache weiter kein Interesse, weil die Freude, durch eigene Selbstthätigkeit, durch eigene Verkettung und Aneinanderreihung der Zahlen das Resultat zu finden, ihm genommen war. Es ging also die rein geistige Uebung, die immer in der Totalansicht und in der bündigen Folgerung besteht, verloren; es ging verloren das Interesse. Das Rechnen mußte gefürchtet von dem Zöglinge, und gering geachtet werden von allen lebhaften Köpfen, die sich nicht in ein solches Labyrinth von unzusammenhängenden Regeln hinein arbeiten konnten.

Wichtig ist folgende Uebung, welche allmählich überführt ins Gebiet der abgezogenen Verhältnisse, wo es nichts mehr frommt, zu sehen, sondern wo man genöthigt wird, sich mit Vorstellungen zu behelfen. Die Anleitung dazu muß natürlich auch hier nur in einer allmählichen Stufenfolge geschehen. Man setzt zunächst alle Zahlen von 1 bis 10 neben einander; dann macht man darauf aufmerksam, wie viel mal eine jede Zahl vorhanden sey. Der Schüler sieht, und wird antworten: ein mal eins, ein mal zwei, ein mal drei u. s. f.

Dann geht man die Stufenleiter herab, und zeigt: wie viel mal die Eins in einer jeden zusammengesetzten Zahl vorhanden sey. Man zeigt, daß ein mal zwei sey zwei mal eins, ein mal drei drei mal eins u. s. f.

Jetzt faßt man die Eins abermals, und sagt nun; ein mal zwei zu erhalten, muß man haben zwei mal eins. Es ist daher nicht die Eins ein ganzes mal zwei, sondern sie wird es erst dadurch,

daß ich sie noch ein zweites mal nehme; oder die Eins ist nur ein Theil der Zwei. Da zwei Theile vorhanden sind, so ist ein mal eins der zweite Theil von zwei mal eins. Um ein mal drei zu erhalten, muß man die Eins drei mal wiederholen. Man setzt die Drei auf, und zeigt, daß sie die drei mal wiederholte Eins sey. Eben deswegen muß ein mal eins der dritte Theil seyn von drei mal eins, oder von drei.

Ist dieß an diesen Zahlen deutlich, so kann man ohne Weile gleich weiter zeigen, daß eins $\frac{1}{4}$ mal vier, $\frac{1}{5} \times 5$, $\frac{1}{6} \times 6$, $\frac{1}{7} \times 7$ u. s. f. sey.

Wenn man damit bis 10 gekommen ist, so faßt man die Zwei auf, indem man spricht: zwei ist zwei Halbe oder ein ganzes mal zwei; zwei ist $\frac{2}{3}$ (man zeigt die Zwei auf ein mal drei) von ein mal drei, $\frac{2}{4}$ von ein mal vier, $\frac{2}{5}$ von ein mal 5, $\frac{2}{6}$ von 1×6 u. s. f.

3 ist 3×1,
$\frac{3}{2} \times 2$, oder ein und ein halb mal 2,
$\frac{3}{3} \times 3$, oder ein mal drei,
$\frac{3}{4} \times 4$,
$\frac{3}{5} \times 5$,
$\frac{3}{6} \times 6$.

4 ist 4×1,
$\frac{4}{2} \times 2$, oder 2×2,
$\frac{4}{3} \times 3$, oder $1\frac{1}{3} \times 3$,
$\frac{4}{4} \times 4$, oder ein ganzes mal 4,
$\frac{4}{5} \times 5$,
$\frac{4}{6} \times 6$.

5 ist 5×1,
$\frac{5}{2} \times 2$, oder $2\frac{1}{2} \times 2$,
$\frac{5}{3} \times 3$, oder $1\frac{2}{3} \times 3$,
$\frac{5}{4} \times 4$, oder $1\frac{1}{4} \times 4$,
$\frac{5}{5} \times 5$, oder 1×5,
$\frac{5}{6} \times 6$ u. s. f.

6 ist 6×1,
$\frac{6}{2} \times 2$ oder 3×2,
$\frac{6}{3} \times 3$ oder 2×3,
$\frac{6}{4} \times 4$ oder $1\frac{2}{4} \times 4$,
$\frac{6}{5} \times 5$ oder $1\frac{1}{5} \times 5$,
$\frac{6}{6} \times 6$ oder 1×6,
$\frac{6}{7} \times 7$.

7 ist 7×1,
$\frac{7}{2} \times 2$ oder $3\frac{1}{2} \times 2$,
$\frac{7}{3} \times 3$ oder $2\frac{1}{3} \times 3$,
$\frac{7}{4} \times 4$ oder $1\frac{3}{4} \times 4$,
$\frac{7}{5} \times 5$ oder $1\frac{2}{5} \times 5$,
$\frac{7}{6} \times 6$ oder $1\frac{1}{6} \times 6$,
$\frac{7}{7} \times 7$ oder 1×7,
$\frac{7}{8} \times 8$ u. s. f.

Man behandele 8, 9 und 10 auf eben dieselbe Weise. Dann lasse man ganz die Uebung folgen, die S. 32 schon ausgeführt worden ist; nur vergesse man auch hier nicht alles nachzuweisen. Es wird dadurch die besondere Beziehung einer jeden Zahl auf die andere recht deutlich werden. Es muß veranschaulicht werden, daß allemal eine ganz andere Beziehung Statt findet, wenn eine andere Zahl gegeben ist; und daß nach dieser Beziehung und Vergleichung alle Zahlenverhältnisse sich richten. Das Verhältniß ist dann unveränderlich dasselbe; die Eins kann mit der Vier in keinem andern Verhältnisse stehen als dem gegebenen; es bleibt immer $\frac{1}{4}$; so viel mal sie auch vorhanden seyn mag, so viel mal ist sie auch $\frac{1}{4}$. Eben so ist 3 nie etwas anders, als $\frac{3}{4}$, und wenn sie auch noch so häufig wiederkehrt. Eben so bleibt 2 in Beziehung auf Fünf $\frac{2}{5}$, und läßt durchaus kein ander Verhältniß zu. Das Verhältniß aller Zahlen ist nothwendig und unabänderlich bestimmt, so lange die Zahlenordnung bestimmt ist. Dieser Satz muß durch die eben beschriebenen Uebungen recht praktisch wer-

den, dadurch, daß er recht vor die Augen gelegt wird. Man muß durchaus nicht davon ausgehen, daß das Verhältniß der Theile zu einem Ganzen abhänge von der physischen Theilung eines oder mehrerer Gegenstände, sondern einzig von dem Verhältnisse der Zahlen selbst. Der Begriff der Viertel muß sich nicht gründen auf die vierfache Theilung eines Gegenstandes, sondern auf eine nothwendig bestimmte Anschauung der Zahl 4, und des Verhältnisses aller Einer zu derselben. Es ist daher durchaus zwecklos, wenn man an der Theilung der Gegenstände den Begriff der Theile deutlich machen will; da wir ja eben erst durch das Verhältniß der Zahlen in den Stand gesetzt werden, die Gegenstände zu theilen; und wir sagen dann, daß die Theilung gelungen sey, wenn gerade dasselbe Verhältniß in den Gegenständen dargestellt ist, welches zwischen den Zahlen Statt findet. Der Lehrer übe also hier ja sorgfältig eine jede Zahl in Verhältniß zu stellen mit der andern; dies kann aber auf keine andere Weise geschehen, als daß die Eine als integrirender Theil der Andern angesehen wird.

Man wendet das Letztere auch auf andere höhere Zahlen an, und sieht, wie viel eine jede kleinere Zahl in einer grössern enthalten sey. Vorzüglich muß das aber nur auf gerade sich auflösende Zahlen angewendet werden.

Man stellt hier zunächst die Zehn auf, und zeigt, wie diese 2×5 und 5×2 sey. Man zeigt, daß ein mal 2 der fünfte Theil, $2 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, $3 \times \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, und 5 dagegen $\frac{1}{2} \times 10$ seyen. Die 11 erlaubt weiter keine Ansicht, als diejenige, welche die Einer in Beziehung auf die 11 selbst darbieten; wohl aber erlaubt die 12 verschiedene Zusammenstellungen. Sie ist nämlich

2×6 und 6×2,
3×4 und 4×3.

Man zeigt und spricht nun

$1 \times 6 = \frac{1}{2}$ von 2×6.

$12 = 6 \times 2$:

$1 \times 2 = \frac{1}{6}$ von 6×2;

$2 \times 2 = \frac{2}{6}$ von 6×2.

$12 = 3 \times 4$:

$1 \times 4 = \frac{1}{3}$ von 3×4, $(4 = \frac{1}{3} \times 12)$;

$2 \times 4 = \frac{2}{3}$ von 3×4, $(8 = \frac{2}{3} \times 12)$.

$12 = 4 \times 3$:

$1 \times 3 = \frac{1}{4}$ von 4×3, $(3 = \frac{1}{4} \times 12)$;

$2 \times 3 = \frac{2}{4}$ von 4×3, $(6 = \frac{2}{4} \times 12)$;

$3 \times 3 = \frac{3}{4}$ von 4×3, $(9 = \frac{3}{4} \times 12)$.

Es wird hier allezeit gesprochen, wie viel durch jede Multiplication entstanden ist.

So wird z. B. gesprochen: 3×2 ist 3 mal der sechste Theil von 6×2; $3 \times 2 = 6$; $6 \times 2 = 12$; $6 = \frac{3}{6} \times 12$. 4×2 ist 4 mal der sechste Theil von sechs mal 2; $4 \times 2 = 8$; $6 \times 2 = 12$; $8 = \frac{4}{6} \times 12$. $5 \times 2 = 5$ mal der sechste Theil von 6×2; $5 \times 2 = 10$; 6×2 ist 12; $10 = \frac{5}{6} \times 12$.

Es wird aber durchaus nicht nöthig seyn, bei jeder einzelnen Zahl bis in dieses Detail zu gehen; besonders bei der Klarheit, mit welcher dies alles vor den Sinnen des Schülers steht.

Man muß sich hüten, den Schüler hier allzusehr zurück zu halten, besonders da, wo der Geist einmal einen Vorsprung gewonnen.

Man geht über zur 14. In ihr lösen sich hinwiederum nur 2 Zahlen ganz auf. Nämlich 2 und 7.

Sie ist 2×7 und 7×2.

So viel mal 2 eine jede Zahl enthält, so viel mal ist sie der siebente Theil; und so viel mal irgend eine Zahl 7 enthält, so viel mal ist sie $\frac{1}{2}$ von 14.

Man macht das erstere deutlich, indem man auf 2 zeigt und spricht $2 = \frac{1}{7} \times 14$; 4 sind $\frac{2}{7} \times 14$; $6 = \frac{3}{7} \times 14$ u. s. f.

Die Zahl 15 gestattet hinwiederum eine Auflösung der 5 und der 3; denn 15 ist 3×5 und 5×3; $3 = \frac{1}{5}$ von 5×3, oder $3 = \frac{1}{5} \times 15$. So viel mal als eine jede Zahl drei enthält, so viel mal muß sie natürlich der fünfte Theil seyn. Dagegen ist 5 der dritte Theil, und 10 muß $\frac{2}{3} \times 15$ seyn, weil $10 = 2 \times 5$, und $15 = 3 \times 5$ ist.

18 läßt sich in 4 Zahlen auflösen. Es ist nämlich

2×9 und 9×2,
3×6 und 6×3.

Man stellt also 2×9 hin, und daneben 3×6. Man zeigt, daß $1 \times 9 = \frac{1}{2}$ von 2×9, und $1 \times 2 = \frac{1}{9}$ von 9×2 sey. Man macht den Schüler ferner darauf aufmerksam, daß 1×3 sey $\frac{1}{6}$ von 6×3; und $1 \times 6 = \frac{1}{3}$ von 3×6 mache.

Der Lehrer laufe nur das durch, und mache es recht geläufig; denn es erleichtert diese Uebung gar sehr die folgenden, die freilich verwickelter sind.

Die Zahl 20 erlaubt ebenfalls eine Auflösung durch vier Zahlen. Diese sind 10, 2, 4 und 5. 10 ist $\frac{1}{2} \times 20$; $2 = \frac{1}{10} \times 20$; $4 = \frac{1}{5} \times 2$; $5 = \frac{1}{4} \times 20$.

Die 22 gestattet nur der 11 und der 2 eine Auflösung; denn 22 ist 2×11 und 11×2; $\frac{1}{2} \times 22$ ist 11; $\frac{1}{11} \times 22$ ist 2.

24 ist für diese Uebungen sehr reichhaltig, und es ist gut und nützlich, wenn diese recht genau durchgegangen werden; weil sie gerade dem Zöglinge eine recht genaue Umsicht geben, und die Zahl von allen Seiten ansehen lehren.

24 ist

2×12 und 12×2,
3×8 und 8×3,
4×6 und 6×4.

$2 = \frac{1}{12}$
$12 = \frac{1}{2}$
$3 = \frac{1}{8}$
$8 = \frac{1}{3}$
$4 = \frac{1}{6}$
$6 = \frac{1}{4}$
} × 24.

Man zeigt dieß alles an den Hölzern nach, und macht allezeit darauf aufmerksam, wie viel mal sie irgend einen dieser Theile von 24 enthalten.

$2 = \frac{1}{12}$; $3 = \frac{1}{8}$; $4 = \frac{2}{12}$ und $\frac{1}{6}$ mal 24.

$6 = 3 \times 2$; folglich auch $\frac{3}{12} \times 24$.

$6 = 2 \times 3$; $3 = \frac{1}{8} \times 24$; folglich ist $6\frac{2}{8} \times 24$.

6 ist aber auch $\frac{1}{4} \times 24$.

8 ist 4×2; $2 = \frac{1}{12}$; folglich ist $8 = \frac{4}{12} \times 24$.

$8 = 2 \times 4$; $4 = \frac{1}{6}$; folglich ist $8\frac{2}{6} \times 24$.

$8 = \frac{1}{3} \times 24$; denn 24 ist 3×8.

$10 = 5 \times 2$; $2 = \frac{1}{12}$; folglich $10 = \frac{5}{12} \times 24$.

$12 = 6 \times 2$; $2 = \frac{1}{12}$; folglich ist $12\frac{6}{12} \times 24$.

$12 = 4 \times 3$; $3 = \frac{1}{8}$; folglich ist $12 = \frac{4}{8} \times 24$.

$12 = 2 \times 6$; $6 = \frac{1}{4}$; folglich ist $12 = \frac{2}{4} \times 24$.

12 ist endlich $\frac{1}{2} \times 24$.

$14 = 7 \times 2$; $2 = \frac{1}{12}$; folglich ist $14 = \frac{7}{12} \times 24$.

$15 = 5 \times 3$; $3 = \frac{1}{8} \times 24$; folgl. ist $15 = \frac{5}{8} \times 24$.

$16 = 8 \times 2$; $2 = \frac{1}{12}$; folglich ist $16 = \frac{8}{12} \times 24$.

$16 = 4 \times 4$; $4 = \frac{1}{6}$; folglich ist $16 = \frac{4}{6} \times 24$.

$16 = 2 \times 8$; $8 = \frac{1}{3}$; folglich ist $16 = \frac{2}{3} \times 24$.

$18 = 9 \times 2$; $2 = \frac{1}{12}$; 18 ist folglich $\frac{9}{12} \times 24$.

$18 = 6 \times 3$; $3 = \frac{1}{8}$; 18 ist folglich $\frac{6}{8} \times 24$.

$18 = 3 \times 6$; $6 = \frac{1}{4}$; 18 ist folglich $\frac{3}{4} \times 24$.

$20 = 10 \times 2$; $2 = \frac{1}{12}$; 20 ist folglich $\frac{10}{12} \times 24$.

$20 = 5 \times 4$; $4 = \frac{1}{6}$; folglich ist $20 = \frac{5}{6} \times 24$.

Es kann unmöglich eine jede Uebung so detaillirt hier durchgegangen werden. Allein der Lehrer muß allerdings ins Detail gehen. Er darf bis hundert keine Zahl fehlen lassen, die er nicht auf diese Weise, wenn auch nicht mit gleicher Ausführlichkeit behandelt. Letztere wird deshalb überflüssig, weil nur ein oder wenige Beispiele gegeben seyn

dürfen, um dem Schüler den Typus in die Hand zu geben, nach welchem er alle andere Zahlen zu behandeln hat.

Wir gehen zu §. 13, S. 36 über.

Es war in dem Vorhergehenden der Begriff der Theile gegeben; diese wurden auf ein angenommenes Ganze bezogen, das durch die Theile gebildet ist. Man darf zuerst nur daran erinnern, wie viel aliquote Theile erfordert werden, um dasselbe zu formiren. Man setzt, um dieß zu versinnlichen, zuerst ein mal zwei auf, und zeigt: zwei Halbe machen ein Ganzes. Damit auch nicht der geringste Irrthum möglich sey, so nimmt man mehrere Hölzer von verschiedener Größe, die man durch einen Strich in zwei gleiche Theile theilt. Hierauf stellt man die Dreier auf, und spricht: drei Drittel machen ein Ganzes u. s. f. In der zweiten Uebung ist zu zeigen, daß die Theilung ganz unabhängig sey von jeder Zahl, und daß sich mithin die Drei, Vier und Fünf auf einerlei Weise theilen lassen müssen. Man stellt zu diesem Ende zuerst Eins auf, und nennt dieß als ein Ganzes. Man setzt dann zwei Einer neben einander, und macht darauf aufmerksam, daß ein Halb von zwei seyn müsse zwei Halbe; zwei Halbe sind aber, vermöge des Vorigen, ein Ganzes; es ist also ein Halb von zwei eins.

Hierauf setzt man Drei an, und zeigt, daß man nun von jeder Eins ein Halb nehmen müsse. Da 3 vorhanden sind, so erhält man dadurch $\frac{3}{2}$. Da aber $\frac{2}{2}$ ein Ganzes machen, so sind natürlich $\frac{3}{2}$ eins und ein Halb. Es ist daher ein Halb von drei gleich $1\frac{1}{2}$.

Man geht auf diese Weise alle Zahlen von eins bis zwanzig durch. Der Schüler muß gewöhnt werden, einen jeden Theil mit Schnelligkeit zu finden. Dieß wird dann auch ohne Mühe geschehen, wenn nur erst das Einfache begriffen ist.

Dieselben Uebungen nimmt der Zögling sogleich mit den Dritteln vor. Auch hier muß er von der

Eins ausgehen, und zeigen, daß von einer jeden Eins der dritte Theil genommen werden müsse, und daß, wenn man eine Menge Einer hat, von denen man den dritten Theil suchen soll, man zunächst eben so viel Drittel erhalte, als man Einer hat. Nun machen aber drei Drittel ein Ganzes, und es müssen daher allezeit so viel Ganze entstehen, als man drei Drittel hat. Auf diese Weise findet man diejenige Zahl, welche von irgend einer andern der dritte Theil ist, ohne Schwierigkeiten. Man geht bei der Uebung, von einer jeden Zahl den dritten Theil zu finden bis 30. Der dritte Theil von 3 Zig ist ein Zig.

Auf eben dieselbe Weise behandelt man Viertel, Fünftel und Sechstel bis Zehntel. Bei den Vierteln geht man von eins bis 40, bei den Fünfteln bis 50, bei den Sechsteln bis 60, bei den Siebenteln bis 70, bei den Achteln bis 80, bei den Neunteln bis 90, bei den Zehnteln bis Hundert. So hat man abermals das ganze Dekadensystem in einer neuen Beziehung kennen gelernt. Der Lehrer setze ja eine jede Uebung detaillirt so lange fort, bis der aliquote Theil 10 beträgt. Denn dann schließt sich allezeit die Ordnung, und es beginnt eine neue. Es muß z. B. der fünfte Theil einer jeden Zahl von eins bis 50 gesucht werden, weil $\frac{1}{5}$ von 50 zehn ist. Weiter zu gehen ist aber nicht nöthig; denn eine jede Zahl, die über diese geschlossenen Zig hinausgeht, ist nur Wiederholung desjenigen, was schon da gewesen ist. Will man z. B. $\frac{1}{2}$ von 21 suchen, so sondert man sogleich in der Vorstellung die 20 von der Eins, und sucht $\frac{1}{2}$ von 20 und $\frac{1}{2}$ von Eins. Ein Halb von 20 ist 10; ein Halb von 1 ist $\frac{1}{2}$. Es ist daher $\frac{1}{2}$ von $21 = 10\frac{1}{2}$. Wäre $\frac{1}{2}$ von 33 zu suchen, so müßte man zuerst zeigen, daß 33 dreizehen mehr ist als 20. Es müßte demnach $\frac{1}{2}$ von 20 und ein Halb von 13 gesucht werden. Ein Halb von 20 ist aber

10 und $\frac{1}{2}$ von 13 ist $6\frac{1}{2}$. Es ist daher ein Halb von $33 = 10 + 6\frac{1}{2}$, d. i. $16\frac{1}{2}$. Die Sache selbst ist oben (S. 38 f., und vorzüglich S. 44 und 45.) genugsam auseinander gesetzt; es würde daher eine jede weitere Erörterung überflüssig seyn. Ich mache nur noch darauf aufmerksam, daß der Lehrer hier zu verdeutlichen hat, wie genau diese Uebung mit den vorhergehenden, wo allemal gesehen wurde, wie viel mal irgend eine kleinere Zahl in einer größern enthalten sey, oder wie viel mal eine größere Zahl wiederholt werden muß, um eine kleinere zu erzeugen. Es ist nur eine veränderte Ansicht da, die darin besteht, daß alle Einer der kleinern Zahl in Beziehung auf sich selbst gesetzt werden. Man muß es verdeutlichen, daß, wenn man weiß, wie viel mal irgend eine größere Zahl die Drei enthalte, schon dadurch der dritte Theil von selbst gefunden sey.

Denke man sich noch als Beispiel die Zahl 29, von der man den dritten Theil suchen soll. Der Schüler wird sogleich sagen $\frac{1}{3}$ von 29 ist $\frac{29}{3}$. Dadurch ist eigentlich der gesuchte Theil schon gefunden. Aber die Theile sind bei weitem mehr als ein Ganzes, und müssen um deswillen in Ganze umgesetzt werden. Dies kann man leicht, indem man weiß, daß drei Drittheile ein Ganzes machen. So viel mal also 29 mal drei ist, so viel mal sind auch drei Drittheile; 29 ist aber $9\frac{2}{3} \times 3$, also auch $9\frac{2}{3}$ mal drei Drittel; ein mal drei Drittel sind ein Ganzes; $9\frac{2}{3}$ mal drei Drittel müssen daher auch $9\frac{2}{3}$ Ganze seyn.

Damit der Lehrer in den Stand gesetzt werde, dieß seinen Schülern noch mehr zu verdeutlichen, so füge ich noch ein Beispiel hinzu.

Wir wollen setzen, es sey ein Sechstel von 55 zu suchen.

Der Lehrer wird hier mit seinen Schülern so räsonniren: ein Sechstel von 55 ist $\frac{55}{6}$; ein mal

$\frac{6}{6}$ ist ein Ganzes; $\frac{54}{6}$ ist $9 \times \frac{6}{6}$; 55 ist $\frac{1}{6}$ mehr, als $\frac{54}{6}$; folglich $\frac{1}{6}$ mehr, als $9 \times \frac{6}{6}$. Da ein mal $\frac{6}{6}$ ein Ganzes ist, so sind $9\frac{1}{6} \times \frac{6}{6}$ auch 9 Ganze und $\frac{1}{6}$. Es ist also der sechste Theil von 55 gleich $9\frac{1}{6}$.

Jeder von den hier benannten Theilen muß von Zahl zu Zahl durchgegangen werden. Die Fertigkeit ist sehr wichtig und wesentlich. Welche Uebungen hier vorkommen müssen, ist oben genugsam angegeben. So wie dort einzelne einfache Beispiele mit möglichster Sorgfalt auseinander gesetzt sind, so mache man es auch bei der Ertheilung des Unterrichts. Man hüte sich ja, über die Anfangspuncte hinwegzugleiten; man behandele diese lieber mit ängstlicher Genauigkeit, damit sich auch von dieser Uebung ein Typus bilde, nach dem alles andere sich behandeln lassen muß.

Eine weitere Vorschrift ist die Anwendung alles des auf diese Weise Durchgegangenen auf Zig. Die Zig müssen natürlicher Weise hier nicht minder als vorher wie Einer behandelt werden. Man stellt zunächst ein Zig auf, und spricht: $\frac{1}{2}$ Zig ist ein halb mal 10; ein halb mal 10 ist 5. Ein halb mal 2 Zig ist zwei halbe Zig; zwei halbe Zig sind ein ganzes Zig. Ein halb mal dreißig sind drei halbe Zig, das sind $1\frac{1}{2}$ Zig; ein Zig ist 10; ein halb Zig ist ein halb mal $10 = 5$; $10 + 5 = 15$; ein halb mal 30 ist also 15. Ein halb mal 40 ist 2 Zig u. s. f.

So wie man vorher mit diesen Uebungen bis 20 ging, so führt man dieselben hier durch bis zu 20 Zig, oder 200. Man vergleicht aber die Uebungen mit den vorhergehenden, und es wird dem Schüler sehr bald in die Augen fallen, daß die Hälfte einer Anzahl von Zig gerade eben so viel Zig betragen müsse, als die Hälfte von gleich vielen Einern genommen Einer betrug; so, daß zwischen dieser und der vorhergehenden Uebung durch-

aus weiter kein Unterschied Statt finde, als der, daß die Zig weiter noch zergliedert und in Einer aufgelöset werden können. Damit aber diese Uebungen schneller und richtiger gefaßt werden können, so lehre man gleich alle Hunderte in Zig umsetzen; man zeige, daß 110 ist eilf Zig, 120 = zwölf Zig, 130 = 13 Zig. Wenn ein Halb von dem Letztern zu suchen wäre, so würde man sogleich $\frac{1}{2}$ von 13 nehmen, das ist aber $6\frac{1}{2}$. Ein Halb von 130 wird 6 und $\frac{1}{2}$ Zig seyn, das ist 60 + 5 = 65. Die Uebung selbst ist S. 41 f. ausführlich auseinander gesetzt. Ich füge nur noch hinzu, daß der Lehrer durchaus darauf sehen muß, daß die Auflösung fertig und ohne Anstoß gemacht werde; denn sie ist der Hauptgewinn des ganzen Verfahrens. Es muß die ganze Analyse aus dem Innern so abgelesen werden, als stünde sie vor den Augen. Dann kann man erst sagen, daß dieser Abschnitt zu der gehörigen Fertigkeit gebracht sey.

Die Uebungen, welche §. 15 (S. 46 f.) vorkommen, sind Erweiterung der vorhergehenden. Es werden nämlich kleinere Brüche zu finden gelehrt. Der Schüler wird durch dieselben vorzüglich an Gewandtheit gewinnen, und seine Umsicht in das Gebiet der Zahlen erweitern. Hier muß der Lehrer zuerst den Schüler seine Aufgabe so auflösen lehren, als er die vorhergehenden gelöset hat. Wenn z. B. $\frac{1}{13}$ von 60 zu suchen wäre, so würde er $\frac{6}{13}$ Zig nehmen, das ist $4\frac{8}{13}$. Eben so würde er von 100 $\frac{10}{13}$ Zig, von 200 $\frac{20}{13}$ oder $1\frac{7}{13}$ Zig suchen. Allein man deute hier schon darauf hin, daß ein Dreizehentel von 10 sey $\frac{3}{13}$ weniger als ein Zig, und daß mithin auch bei einer jeden größern Anzahl von Zig immer dasselbe Verhältniß Statt finde. So wäre in dem obigen Beispiele gleich die Auflösung sehr nahe gewesen. Ein Dreizehentel von 60 ist $\frac{3}{13}$ weniger als 6; $6 - \frac{3}{13} = 4\frac{5}{13}$. Ein Dreizehentel von 70 ist $\frac{3}{13}$

weniger als 7 Einer; $7 - \frac{3}{13} = 5\frac{5}{13}$. Jedoch dies ist oben in dem ersten Theile S. 48 f. ausführlich angegeben. Wenn der Lehrer die hier gegebene Anleitung mit dem Obigen zusammenhält, so wird das Ganze hoffentlich ohne Schwierigkeiten zu verstehen und anzuwenden seyn.

Sey die Zahl auch noch so groß, so kann sich das Verhältniß nicht ändern. Der Schüler, dem es nicht schwer werden kann dieß zu fassen, wird sich dann bald einen allgemeinen Typus bilden, nach welchem er die größern Aufgaben mit eben der Leichtigkeit löset, als die leichteren.

Der Anfang hierzu wird mit der Zahl 11 gemacht, in folgender Ordnung:

$\frac{1}{11} \times 10 = \frac{10}{11}$, oder $\frac{1}{11}$ weniger als 1.

$\frac{1}{11} \times 20 = \frac{2}{11} \times 10$, oder $\frac{2}{11}$ weniger als 2; $\frac{2}{11} < 2 = 1\frac{9}{11}$.

$\frac{1}{11} \times 30 = \frac{3}{11} \times 10$, oder $\frac{3}{11} < 3$; $\frac{3}{11}$ weniger als drei ist $2\frac{8}{11}$.

$\frac{1}{11} \times 40 = \frac{4}{11} \times 10$, oder $\frac{4}{11} < 4 = 3\frac{7}{11}$.

$\frac{1}{11} \times 50 = \frac{5}{11} \times 10$, oder $\frac{5}{11} < 5 = 4\frac{6}{11}$.

Auf diese Weise bildet sich der Schüler eine Norm, nach welcher er allemal verfährt, wenn er gerade diese Theile zu suchen hat. Es wird ihm dadurch die Regel praktisch, daß, wenn von irgend einer größern Zahl $\frac{1}{11}$ zu suchen ist, er allemal $\frac{1}{11}$ Einer weniger zu nehmen habe, als er Zig vor sich sieht.

Es wird ein bedeutender Gewinn für den Lehrer seyn, wenn er alle Zahlen von 11 bis 20 auf gleiche Weise behandelt, jedoch mit Hinweglassung derjenigen, die eine weitere Auflösung der Theile gestatten, z. B. der 14, die in Siebentel, der 15, die hier in Drittel, und 18, die in Neuntel aufgelöset werden müssen, um das Resultat schneller hervorzubringen, wovon weiter unten die Rede seyn wird.

Es wird nicht überflüssig seyn, hier einige vollständige Beispiele des methodischen Verfahrens zu geben. Wir wählen zuerst dazu die Zahl 19, weil diese der 20 am nächsten kommt. Die Veranschaulichung geschieht auf folgende Weise. Der Lehrer stellt zunächst 20 auf, und deutet an, daß davon der neunzehnte Theil gesucht werden solle. Um dieß zu bewerkstelligen, nimmt er 1 von 20, wodurch er 19 erhält; davon ist der neunzehente Theil 1. Hierauf zeigt er, daß nun von dem vorher weggenommenen Einem auch noch der neunzehente Theil zu suchen sey. Es hat sich auf diese Weise bewährt, daß der neunzehente Theil von 20 sey $1\frac{1}{19}$. Wenn 30 vorhanden sind, so sieht man zunächst, daß diese 10 mehr sind als 20. Man sondert diese 10, nimmt dann von der 20, wie vorher, eins weg, damit nur 19 übrig bleiben; dieß Eine fügt man den 10 Uebrigen bei, so erhält man zwei Zahlen, nämlich 19 und 11 von denen der neunzehnte Theil gesucht werden soll. Der neunzehente Theil von 19 ist 1; der neunzehente Theil von 11 ist $\frac{11}{19}$; es ist daher $\frac{1}{19}$ mal $30 = 1\frac{11}{19}$.

$\frac{1}{19} \times 20 = \frac{20}{19}$; $\frac{20}{19} = 1\frac{1}{19} \times \frac{19}{19}$, oder $1\frac{1}{19}$ des Ganzen.

$\frac{1}{19} \times 30 = \frac{30}{19}$, d. i. $1\frac{11}{19} \times \frac{19}{19}$, oder $1\frac{11}{19}$.

$\frac{1}{19} \times 40 = \frac{40}{19}$; $40 = 2 \times 20$; $\frac{1}{19} \times 20 = 1\frac{1}{19}$; $\frac{1}{19} \times 40$ wird also seyn $2\frac{2}{19}$.

$\frac{1}{19} \times 50 = \frac{50}{19}$; 50 ist $2 \times 20 + 10$; folglich $2\frac{2}{19} + \frac{10}{19}$; $2\frac{2}{19} + \frac{10}{19} = 2\frac{12}{19}$.

[Der Lehrer muß hier nämlich mehrere mal 20 hinstellen; er muß dann zeigen, daß, so viel mal als er 20 da stehen hat, so viel mal eins abzusondern sey, um den neunzehenten Theil zu erhalten. Wenn 50 vorhanden sind, so wird er die 20 zwei mal hinstellen, und die 10 besonders; dann wird er von jedem 20 eins nehmen, und zu den übrigen 10 thun, die dadurch bis auf 12 vermehrt werden. Er erhält dadurch 2×19 und 12; 2×19 ist aber 19×2, und der neunzehente Theil von 19×2 ist 1×2; der neunzehente Theil von 12 ist $\frac{12}{19}$.

Auf diese Weise wird man dann einsehen, daß $\frac{1}{19}$ von 50 ist $2\frac{12}{19}$.]

Ist $\frac{1}{19}$ von 60 zu suchen, so stellt man 3×20 hin. Von jedem dieser 20 nimmt man alsdann eins, und erhält dadurch 3×19 und 3. Nun läßt man von den 3×19 den neunzehenten Theil suchen; dieser ist 3. Von den zurückgebliebenen 3 Einern sucht man ebenfalls den neunzehenten Theil, der natürlich $\frac{3}{19}$ beträgt. Es ist daher deutlich veranschaulicht, daß der neunzehente Theil von 60 sey $3\frac{3}{19}$. Es wird kaum nöthig seyn, dieselbe Anleitung weiter zu verfolgen. Auch wird der Schüler bald sich selbst helfen, indem es ihm bequemer wird, sich diese Verhältnisse vorzustellen, als sie aufzubauen. Dahin muß es aber kommen, ehe der Lehrer die Uebungen mit dieser Zahl verläßt.

$\frac{1}{19} \times 70 = \frac{70}{19}$; $70 = 3 \times 20 + 10$, das sind $3 \times 19 + 3 + \frac{10}{19}$, oder $3\frac{13}{19}$.

$\frac{1}{19} \times 80$ sind $4\frac{4}{19}$; denn 80 sind 4×20; $\frac{1}{19}$ von 20 ist $1\frac{1}{19}$; 80 muß also auch seyn 4×19 und 4; $\frac{1}{19}$ von 4×19 ist aber 4; $\frac{1}{19}$ von 4 Einern sind $\frac{4}{19}$; es ist demnach $\frac{1}{19} \times 80 = 4\frac{4}{19}$ u. s. w.

Das Letzte, was für diese Zahl geschehen kann, ist, den Zögling zu der Einsicht der Regel zu bringen, daß der neunzehente Theil einer jeden Summe von Zig allezeit ein Neunzehentel mehr betrage, als diejenige Zahl, welche anzeigt, wie viel mal die 20 in derselben enthalten sey. Ist ihm diese Zusammenstellung geläufig, so wird er allemal da, wo er $\frac{1}{20}$ gefunden, auch gleich ein Neunzehentel finden; wird, ohne zu rechnen, wissen, daß, wenn die 20 in irgend einer Zahl z. B. 6 mal enthalten wäre, 19 eben so viel und noch ein Neunzehentel dieser Sechs mehr darin enthalten seyn müsse; denn jedes mal 20 ist ein Neunzehentel mehr als 19; da sechs mal 20 da sind, so müssen diese auch $\frac{1}{19}$

mehr machen, als 6; $\frac{1}{19} \times 6$ sind aber $\frac{6}{19}$. Daraus wird der Lehrer sogleich herleiten, daß, wenn der zwanzigste Theil einer Zahl 6 betrüge, der neunzehente $6\frac{6}{19}$ machen müsse; wenn der zwanzigste Theil von $180 = 9$ ist, der neunzehente eben so viel, und noch ein Neunzehentel der 9, also $9\frac{9}{19}$ machen müsse.

So wie hier die 19 bearbeitet ist, eben so verfahre man dann mit der 17 und 13, die beide schon oben behandelt sind (vergl. S. 48 und 49.). Die 18, 16, 15, 14, so wie alle andere gerade Zahlen, die auch über 20 hinausgehen, lasse man noch unberührt; weil, wie schon bemerkt ist, diese späterhin in kleinere Brüche umgesetzt, und dann um so viel leichter gefunden werden können. Aber wohl thun wird man, wenn man hier sogleich mehrere und größere Zahlen wählt, um mit ihnen eben so zu verfahren. An die Behandlung der 19 schließt sich unmittelbar 29, 39, 49, 59, 69, 79 u. s. f. an. Die 29 läßt der Lehrer an der 30 messen, da $30\ \frac{1}{29}$ mehr als 29, so muß eine jede größere Zahl auch die 29 ein neun und zwanzigstel mal mehr enthalten als die 30. Ist davon die Totalübersicht gegeben, so gehe dann der Lehrer zurück ins Detail, und suche alle ungleiche Zahlen eines Zig aus, die er dann einzeln nach der hier gegebenen Norm behandeln muß.

Die Reihenfolge dieser Uebungen ist ganz wie die vorhergehende, nur auf die 30 angewendet. Z. B. 60 ist 2×30; $30 = 1\frac{1}{29} \times 29$; folglich ist 60 $2 \times 1\frac{1}{29} = 2\frac{2}{29}$ mal 29. Ein Dreißigstel von $60 = 2\frac{1}{29}$ ist $\frac{1}{29}$ mehr als 2; $\frac{1}{29} \times 2 = \frac{2}{29}$; folglich ist $\frac{1}{29} \times 60 = 2\frac{2}{29}$.

Wenn von 300 der dreißigste Theil 30 beträgt, so muß nach eben dieser Regel $\frac{1}{29}$ seyn $30 + \frac{1}{29} \times 30 = 31\frac{1}{29}$. Der Schüler wird bei allen diesen Uebungen sich gewöhnen, sich an den Quotienten zu halten.

Von den Zwanzigern ist hier nur noch die 23 zu behandeln; die übrigen lassen sich allesammt in kleinere Brüche umsetzen. Die 23 muß aber wie vorher die 13 behandelt, mithin nicht mit 30, sondern mit 20 zusammengehalten werden, weil der Unterschied zwischen 20 und 23 weniger beträgt, als zwischen 23 und 30. Man wird leicht finden, daß hier das umgekehrte Verhältniß von dem Vorhergehenden Statt finde. Denn in dem Vorhergehenden wurde die Zahl nach einer grössern, in diesem wird sie nach einer kleinern gemessen. Es bedarf daher kaum mehr der Erinnerung, daß die 23 in einer jeden grössern Zahl $\frac{3}{23}$ weniger enthalten seyn müsse, als 20. Wenn $40 = 2 \times 20$ ist, so ist es $\frac{3}{23}$ weniger, als 2×23; $\frac{3}{23} \times 2$ ist aber $3 \times 2 = \frac{6}{23}$; 40 ist daher $2 \times 23 - \frac{6}{23}$, das ist $1\frac{17}{23}$. Eben so wird auch $\frac{1}{23}$ mal 40 seyn $2 - \frac{6}{23}$, oder $1\frac{17}{23}$.

60 ist 3×20, aber 9 weniger als 3×23; $\frac{3}{23} \times 3 = \frac{9}{23}$; $3 - \frac{9}{23} = 2\frac{14}{23}$ *).

31 wird mit 30 zusammengehalten; und da 30 ein Ein und dreißigstel weniger ist, als 31, so wird auch 31 in einer jeden grössern Zahl allezeit $\frac{1}{31}$ weniger enthalten seyn, als 30. Wenn $90 = 3 \times 30$ ist, so wird es $3 - \frac{1}{31} \times 30$ seyn, das sind $\frac{3}{31}$ weniger als drei Ganze, das sind $2\frac{28}{31}$.

Außer der Zahl 31 giebt es keine mehr, die man vortheilhaft mit 30 vergleichen könnte, ohne sie in kleinere Brüche aufzulösen.

Nur 37 und 39 müssen in diese Uebungen mit eingezogen, aber mit 40 verglichen werden, weil diese sich nicht mehr auflösen lassen. Zwar lösen sich $\frac{3}{39}$ in ein Dreizehentel auf; aber da allezeit nur ein Neununddreißigstel bleibt, so wird dieß

*) Wenn man die Stufenleiter der Uebungen verfolgen, und die Regel mechanisch machen will, so kann man allemal im Fortschreiten $\frac{3}{23}$ nehmen, und dem Ganzen eins zugeben.

hier wenig frommen, und daher auch nicht weiter berücksichtigt werden dürfen.

Mit der Vierzig können noch zwei Zahlen zusammengehalten werden, nämlich 41 und 43, weil sich diese nicht mehr auflösen lassen. Es darf kaum erinnert werden, daß auch hier dasselbe zu beobachten ist, was oben bei 23 und 13 zu berücksichtigen war. 41 ist in einer jeden größern Zahl allemal um $\frac{1}{41}$, und 43 sind $\frac{3}{43}$ weniger enthalten, als 40. Wenn also 40 in irgend einer Zahl 6 mal enthalten wäre, dann wäre $41 = 6 - \frac{1}{41} \times 6$, das ist $5\frac{35}{41}$, 43 aber $6 - \frac{3}{43} \times 6$, oder $6 - \frac{18}{43} = 5\frac{25}{43}$.

Außer diesen sind von den Vierzigern noch 47 und 49 zu behandeln, beide aber nicht mit 40, sondern mit 50 zusammenzuhalten. Auch hier muß dasselbe Statt finden, was vorher Statt fand; nämlich so viel mal als 50 in einer Zahl enthalten ist, so viel mal $\frac{3}{47}$ ist 47, und so viel mal $\frac{1}{49}$ ist 49 mehr enthalten. So ist $300 = 6 \times 50$; es wird daher $\frac{3}{47}$ mehr seyn, als 6×47; $\frac{3}{47} \times 6$ sind aber $3 \times 6 = \frac{18}{47}$; es ist daher $300 = 6\frac{18}{47}$ mal 47. Eben so ist es $\frac{1}{49}$ mehr als 6×49, d. i. $6\frac{6}{49} \times 49$. Der funfzigste Theil von 300 ist also 6, der sieben und vierzigste ist $6\frac{18}{47}$, der neun und vierzigste ist $6\frac{6}{49}$ u. s. f.

Von den Funfzigern sind dieselben Zahlen hier zu behandeln, nämlich 51 und 53 noch mit 50 zusammen zu halten, und 57 und 59 an die 60 zu schließen. Das Verfahren bleibt wie vorher.

Von den Sechszigern kann aber nur 61 mit 60 verglichen werden, weil $\frac{3}{63}$ wieder $\frac{1}{31}$ machen, und mithin sich weiter auflösen lassen; 67 und 69 werden an die 70 angeschlossen.

Von den Siebenzigern gehören hierher 71 und 73, und an die 80 können 77 und 79 angeschlos-

sen, und nach Maßgabe des Obigen behandelt werden.

Mit 80 verglichen wird noch 81 und 83, mit 90 aber 87, 89 und 91.

Nach dieser Uebung kann das Auffinden der aliquoten größern Theile durchaus nicht mehr mit so großen Schwierigkeiten verbunden, vielmehr muß es jetzt zu einer eben so unbedingten Fertigkeit, als unerlöschlichen Klarheit gebracht seyn.

Nun erfordert es noch einiger Uebungen, um einen gefundenen Theil nach Willkühr zu multipliciren. Diese werde ich nicht ausführlich beschreiben, weil die Behandlung durchaus nichts Ausgezeichnetes hat. Man sucht allezeit zuerst, wie viel ein aliquoter Theil beträgt, und diesen vermehrt man alsdann der Forderung gemäß. Es sollen z. B. $\frac{6}{11}$ von 30 gesucht werden. Man spricht dann $\frac{1}{11} \times 30$ ist $2\frac{8}{11}$; $\frac{6}{11} = 6 \times 2 = 12$, und $6 \times 8 = \frac{48}{11}$, das sind $4\frac{4}{11}$; $12 + 4\frac{4}{11} = 16\frac{4}{11}$.

Aber es gab hier auch noch einen zweiten Weg, welchen der Lehrer nicht versäumen darf, dem Schüler zu zeigen. Nämlich die 30 konnten zuerst als Einer, und wenn wie oben 6 Eilftel zu suchen waren, eben so behandelt werden, als seyen $\frac{6}{11}$ von 3 zu suchen; $\frac{6}{11} \times 3 = 6 \times 3 = \frac{18}{11}$, das ist $1\frac{7}{11}$; also $1\frac{7}{11}$ Zig oder $10 + \frac{7}{11} \times 10$, $\frac{7}{11} \times 10$ sind aber nach dem Obigen $\frac{7}{11}$ weniger, als sieben Ganze, das sind $6\frac{4}{11}$; diese zu $10 = 16\frac{4}{11}$.

In andern verwickelten Fällen wird die letztere Verfahrungsart mannichmal größere Erleichterung geben.

Der Lehrer gehe einige Zahlen auf beiderlei Weise zunächst durch, und mache den Schüler darauf aufmerksam, welches allezeit der kürzeste und gebahnteste Weg sey. Wenn dieser denselben von

selbst findet, so wird es ihm dann niemand mehr streitig machen, daß er in dem Besitz einer klaren Einsicht dieser Verhältnisse sey.

Wären $\frac{8}{49} \times 100$ zu suchen, so würde man am kürzesten auf dem erstern Wege wegkommen; denn $\frac{1}{49} \times 00$ ist $2\frac{2}{49}$; $8 = 8 \times 2\frac{2}{49} = 16\frac{16}{49}$. Wollte man hingegen den zweiten Weg betreten, so würde man so verfahren: $\frac{8}{49} \times 10 = \frac{80}{49} = 1\frac{31}{49}$ Zig, das sind $10 + \frac{31}{49} \times 10 = \frac{310}{49}$; $\frac{310}{50} = 6\frac{10}{50}$; folglich $\frac{310}{49} = 6\frac{6+10}{49}$, oder $6\frac{16}{49}$; $10 + 6\frac{16}{49} = 16\frac{16}{49}$.

Man sieht, daß hier auf dem zweiten Wege kein Gewinn zu hoffen ist. Aber ein anderer Fall würde Statt finden, wenn z. B. $\frac{11}{47}$ von 90 zu suchen wären. Dann würde man allerdings am besten wegkommen, wenn man sogleich nähme $\frac{11}{47} \times 9 = \frac{99}{47}$; $\frac{94}{47} = 2$; folglich ist $\frac{99}{47} = 2\frac{5}{47}$. Nun sind aber 90 vorhanden; folglich müssen es 20 und $\frac{50}{47}$ seyn. Letzteres macht aber hinwiederum $1\frac{3}{47}$; dies zu 20 giebt $21\frac{3}{47}$. Es betragen demnach $\frac{11}{47} \times 90 = 21\frac{3}{47}$.

Noch auf einen andern Vortheil mache ich den Lehrer aufmerksam. Es wird bei einer der vorhergehenden Uebungen dem Schüler deutlich geworden seyn, daß man den Multiplicandus mit dem Multiplicator vertauschen kann, ohne daß sich das Product ändert. Darauf gründet sich der Divisionssatz: Man kann auch den Dividend mit dem Divisor vertauschen, ohne daß sich der Quotient ändert; den Divisor aber durchaus betrachtet als aliquoten Theil des Dividendus, woran man sich gewöhnen muß, wenn die Regel nicht täuschen soll. Der Divisor muß nicht angesehen werden als concrete Zahl, sondern gleich als Bruch. Wenn also 3 der Divisor, und 8 der Dividend wäre, so müßte die 3 sogleich genannt werden $\frac{1}{3} \times 8$. Es ist diesem gemäß ganz einerlei, ob ich spreche $\frac{1}{3} \times 8$, oder $\frac{8}{3} \times 1$; beides giebt $2\frac{2}{3}$. Eben so ist auch $\frac{2}{3} \times 8$ ganz gleichbedeutend

mit $\frac{8}{3} \times 2$. Dieß läßt sich natürlich in seiner ganzen Umfassung auf höhere Zahlen anwenden. Man muß nicht säumen, allmählig den Schüler dahin zu führen, daß er dieß selbst einsehen lerne. Wir geben davon einige Beispiele, wozu wir am besten nur wenig Zahlen wählen.

$\frac{1}{7} \times 13 = 1 \times \frac{13}{7}$; $\frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$.
$\frac{1}{7} \times 13 = \frac{13}{7} \times 1$; $\frac{13}{7} \times 1 = 1\frac{6}{7}$.

Beides führt, wie man hier deutlich sieht, zu einem und demselben Quotienten. Lasse man nun denselben aliquoten Theil verdoppeln; also, daß $\frac{2}{7}$ des Divisors, oder $\frac{2}{7} \times 13$ zu suchen sey, so wird man gleich sagen können $\frac{13}{7} \times 2$. Daß man gleiche Quotienten erhalten müsse, wird sogleich die Auflösung zeigen, so wie es in der Natur der Sache schon liegt.

$\frac{2}{7} \times 13 = 2 \times 13 = \frac{26}{7}$; $\frac{26}{7} = 3\frac{5}{7}$.
$\frac{13}{7} \times 2 = 13 \times 2 = \frac{26}{7}$; $\frac{26}{7} = 3\frac{5}{7}$.

$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} \times 13 = 3 \times \frac{13}{7} \\ \frac{13}{7} \times 3 = 13 \times \frac{3}{7} \end{array}\right) = \frac{39}{7} = 5\frac{4}{7}$.

$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{7} \times 13 = 4 \times \frac{13}{7} \\ \frac{13}{7} \times 4 = 13 \times \frac{4}{7} \end{array}\right) = \frac{52}{7} = 7\frac{3}{7}$.

$\left.\begin{array}{l} \frac{5}{7} \times 18 = 5 \times \frac{13}{7} \\ \frac{13}{7} \times 5 = 13 \times \frac{5}{7} \end{array}\right) = \frac{65}{7} = 9\frac{2}{7}$.

$\left.\begin{array}{l} \frac{6}{7} \times 13 = 6 \times \frac{13}{7} \\ \frac{13}{7} \times 6 = 13 \times \frac{6}{7} \end{array}\right) = \frac{78}{7} = 11\frac{1}{7}$.

Der Gang dieser Uebungen ist kein anderer, als bei den vorigen. Man fängt, sobald das Verhältniß der einfachen Zahlen auf die oben beschriebene Weise durchgegangen ist, mit 11 an; geht dann dieselben Zahlen durch, welche man oben behandelte, nur mit dem Unterschiede, daß allezeit mehrere aliquote Theile gesucht werden.

Die Vertauschung der Zahlen ist auch dann statthaft, wenn die eine derselben in Zig umgewandelt wird. Es ist diesemnach auch einerlei, ob ich

setze $\frac{20}{7} \times 13$, oder $\frac{13}{7} \times 20$. Wenn von 130 $\frac{6}{7}$ zu suchen wären, so könnte man ohne Anstand nehmen $\frac{13}{7} \times 60$. Beides müßte, vermöge des Vorigen, zu demselben Resultate führen.

Nachdem der Lehrer diese einfachen Zahlen behandelt hat, so verfahre er sogleich auch mit den zusammengesetzten auf eben dieselbe Weise. Er nehme also zunächst 130.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{7} \times 130 = 2 \times \frac{130}{7} \text{ Zig} \\ \frac{130}{7} \times 2 = 130 \times \frac{2}{7} \end{array}\right) = \frac{260}{7}.$$

Es ist aber einerlei, ob der Divisor oder der Dividend zu Zig erhoben wird. Im erstern Falle könnte dann gesetzt werden $\frac{2}{7} \times 130 = \frac{20}{7} \times 13$, eben weil 20×13 und 2×130, vermöge des Obigen, zu gleichen Quotienten führen müssen.

$\frac{3}{7} \times 130 = 30 \times \frac{13}{7}$; denn $\frac{30}{7} \times 13 = 390$; $\frac{130}{7} \times 3 = 390$; $\frac{30}{7} \times 13$ ist aber $4\frac{2}{7} \times 13$; $4 \times 13 = 52$; $\frac{4}{7} \times 13 = 4 \times 13 = \frac{52}{7}$; $\frac{52}{7}$ sind $7\frac{3}{7}$; $7\frac{3}{7}$ zu $52 = 59\frac{3}{7}$.

$\frac{4}{7} \times 130 = \frac{40}{7} \times 13$ oder $\frac{13}{7} \times 40$; $\frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$; $\frac{13}{7} \times 40 = 1\frac{6}{7} \times 40$; $1 \times 40 = 40$; $\frac{1}{7} \times 40 = 5\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7} = 6 \times 5\frac{5}{7} = 30\frac{30}{7}$; $\frac{30}{7}$ sind $4\frac{2}{7}$; $4\frac{2}{7}$ zu 30 sind $34\frac{2}{7}$; $34\frac{2}{7}$ zu 40 sind $74\frac{2}{7}$; folglich sind $\frac{4}{7}$ mal 130 gleich $74\frac{2}{7}$.

$\frac{5}{7} \times 130 = \frac{50}{7} \times 13$; $\frac{50}{7} \times 13 = \frac{13}{7} \times 50$; $\frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$; folglich $1\frac{6}{7}$ mal 50; $1 \times 50 = 50$; $\frac{1}{7} \times 50 = 7\frac{1}{7}$; $\frac{6}{7} = 6 \times 7\frac{1}{7} = 42\frac{6}{7}$; 42 und $\frac{6}{7}$ zu 50 giebt $92\frac{6}{7}$.

$\frac{6}{7} \times 130 = \frac{60}{7} \times 13$; $\frac{60}{7} \times 13 = \frac{13}{7} \times 60$; $\frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$; folglich $1\frac{6}{7} \times 60$; $1 \times 60 = 60$; $\frac{1}{7} \times 60 = 8\frac{4}{7}$; $\frac{6}{7} = 6 \times 8\frac{4}{7}$; $6 \times 8\frac{4}{7} = 48\frac{24}{7}$; $\frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$; $3\frac{3}{7}$ zu $48 = 51\frac{3}{7}$; $51\frac{3}{7}$ zu $60 = 111\frac{3}{7}$.

So läßt man das ganze Beispiel gleich vollständig auffassen und nach allen Verhältnissen durchführen, damit die Form des Rechnens und die Verfah-

fahrungsart den Schülern geläufig werde. Um diese ist es hier zu thun. Die Anwendung davon werden die Letztern selbst bald auf alle andere Zahlen machen lernen, wenn nur die Operationen immer klar vor ihrer Seele stehen. Dieß kann dann aber nicht geschehen, wenn man nur auf das Erweitern sieht, von einer Zahl auf die andere, von einer Uebung auf die andere springt.

Man gehe von hier sogleich zu Eilfteln, und von da zu Dreizehnteln. Man verfahre ganz auf dieselbe Weise, und gehe mit gleicher Langsamkeit und Sicherheit von Zahl zu Zahl zu Werke. Bei Eilfteln fängt man an mit 110.

$\frac{2}{11}$ von 110 ist $2 \times 10 = 20$.

$\frac{2}{11}$ von 120 ist gleich $\frac{20}{11} \times 12$; $\frac{20}{11} \times 12$ ist $\frac{12}{11} \times 20$; $\frac{12}{11}$ ist $1\frac{1}{11}$; folglich $1\frac{1}{11} \times 20$; ein mal 20 ist 20; $\frac{1}{11} \times 20$ ist $1\frac{9}{11}$; eins und $\frac{9}{11}$ zu 20 giebt 21 und $\frac{9}{11}$.

$\frac{3}{11} \times 120 = \frac{12}{11} \times 30$; $\frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}$; $1\frac{1}{11} \times 30$ ist gleich $32\frac{8}{11}$.

$\frac{3}{11} \times 130 = \frac{13}{11} \times 30$; $\frac{13}{11} = 1\frac{2}{11}$; folglich $1\frac{2}{11} \times 30 = 33\frac{6}{11}$.

$\frac{4}{11} \times 130 = \frac{13}{11} \times 40$; $\frac{13}{11} = 1\frac{2}{11}$, folglich $1\frac{2}{11} \times 40$; $1 \times 40 = 40$; $\frac{2}{11} \times 40 = \frac{2}{11} \times 4$; $\frac{2}{11} \times 4 = \frac{8}{11}$; $\frac{2}{11} \times 40$ sind also $\frac{8}{11}$ Zig; ein eilftel Zig ist $\frac{10}{11}$; $\frac{10}{11}$ ist $\frac{1}{11}$ weniger als 1; $\frac{8}{11}$ Zig ist also $1 \times \frac{8}{11}$ weniger als 8; $\frac{8}{11}$ weniger als 8 ist 7 und $\frac{3}{11}$; $7\frac{3}{11}$ zu 40 werden $47\frac{3}{11}$; folglich sind $\frac{4}{11}$ mal $130 = 47\frac{3}{11}$.

$\frac{4}{11} \times 140 = \frac{14}{11} \times 40$; $\frac{14}{11} = 1\frac{3}{11}$, folglich $1\frac{3}{11} \times 40$; ein mal 40 ist 40; $\frac{3}{11}$ mal 40 sind 3 mal $\frac{4}{11}$; 3 mal $\frac{4}{11}$ sind $\frac{12}{11}$; $\frac{12}{11}$ sind $1\frac{1}{11}$; $3 \times \frac{40}{11}$ sind also $1\frac{1}{11}$ Zig; ein Zig ist 10; ein eilftel Zig ist $\frac{10}{11}$; $\frac{10}{11}$ zu vierzig machen $50\frac{10}{11}$.

$\frac{5}{11} \times 140 = \frac{14}{11} \times 50$; $\frac{14}{11} = 1\frac{3}{11}$; folglich $1\frac{3}{11} \times 50$; $1 \times 5 = 5$; $\frac{3}{11} \times 5$ sind $3 \times \frac{5}{11}$; drei mal $\frac{5}{11}$ sind $\frac{15}{11}$; $\frac{15}{11}$ sind $1\frac{4}{11}$; $\frac{3}{11}$ mal 50 müssen also seyn ein Zig und $\frac{4}{11}$ Zig; $\frac{1}{11}$ Zig ist $\frac{10}{11}$, oder $\frac{1}{11}$ weniger als 11, oder 1; $\frac{4}{11}$ müssen seyn $1 \times \frac{4}{11}$ weniger als 4; $\frac{4}{11}$ weniger als 4 sind $3\frac{7}{11}$; $3\frac{7}{11}$ zu 10 sind $13\frac{7}{11}$; 13 und $\frac{7}{11}$ zu 50 sind $63\frac{7}{11}$; folglich sind $\frac{5}{11} \times 140 = 63\frac{7}{11}$.

$\frac{5}{11} \times 150 = \frac{15}{11} \times 50$; $\frac{15}{11}$ sind $1\frac{4}{11}$; folglich $1\frac{4}{11} \times 50$ ist ähnlich $1\frac{4}{11} \times 5$; 1×5 ist 5; $\frac{1}{11} \times 5$ ist $\frac{5}{11}$; $\frac{4}{11}$ mal 5 sind $4 \times \frac{5}{11}$; $4 \times \frac{5}{11}$ sind $\frac{20}{11}$; $\frac{20}{11}$ sind $1\frac{9}{11}$; $1\frac{9}{11}$ zu 5 ist $6\frac{9}{11}$; $1\frac{4}{11} \times 50 = 60$ und $\frac{9}{11}$ Zig; $\frac{9}{11}$ Zig sind $9 \times \frac{10}{11}$; $\frac{10}{11}$ ist $\frac{1}{11}$ weniger als 1; $9 \times \frac{10}{11}$ muß also seyn $\frac{1}{11}$ weniger als 1×9; $\frac{1}{11} \times 9 = \frac{9}{11}$; $\frac{9}{11}$ weniger als 9 sind $8\frac{2}{11}$; $8\frac{2}{11}$ zu 60 ist $68\frac{2}{11}$.

$\frac{6}{11} \times 150 = \frac{15}{11} \times 60$; $\frac{15}{11}$ ist $1\frac{4}{11}$; $1\frac{4}{11} \times 60$ ist ähnlich $1\frac{4}{11} \times 6$; ein mal 6 ist 6; $\frac{4}{11} \times 6$ ist $4 \times \frac{6}{11}$; $4 \times \frac{6}{11}$ sind $\frac{24}{11}$; $\frac{24}{11}$ sind 2 und $\frac{2}{11}$; $2\frac{2}{11}$ zu 6 werden $8\frac{2}{11}$; $1\frac{4}{11}$ mal 60 müssen also seyn 8 und $\frac{2}{11}$ Zig; 80 ist 80; $\frac{2}{11}$ Zig sind $2 \times \frac{10}{11}$; $2 \times \frac{10}{11}$ sind $\frac{20}{11}$; $\frac{20}{11}$ sind $1\frac{9}{11}$; $1\frac{9}{11}$ zu 80 giebt $81\frac{9}{11}$; $\frac{6}{11}$ mal 150 ist also $81\frac{9}{11}$.

$\frac{5}{11} \times 160$ ist $\frac{16}{11} \times 60$; $\frac{16}{11}$ ist $1\frac{5}{11}$, folglich $1\frac{5}{11} \times 60$; $1\frac{5}{11} \times 60$ ist ähnlich $1\frac{5}{11} \times 6$; 1×6 ist 6; $\frac{5}{11} \times 6$ sind $5 \times \frac{6}{11}$; $5 \times \frac{6}{11}$ sind $\frac{30}{11}$; $\frac{30}{11}$ sind $2\frac{8}{11}$; $2\frac{8}{11}$ zu 6 sind $8\frac{8}{11}$; $1\frac{5}{11} \times 60$ sind also $8\frac{8}{11}$ Zig; $\frac{1}{11}$ Zig sind $\frac{10}{11}$; $\frac{10}{11}$ ist $\frac{1}{11}$ weniger als Eins; $\frac{8}{11}$ ist $\frac{1}{11}$ weniger als 8; $1 \times \frac{8}{11}$ weniger als 8 sind $7\frac{3}{11}$; $7\frac{3}{11}$ zu 80 sind $87\frac{3}{11}$; folglich sind $\frac{6}{11} \times 160 = 87\frac{3}{11}$.

$\frac{7}{11} \times 160 = \frac{16}{11} \times 70$; $\frac{16}{11} = 1\frac{5}{11}$, folglich $1\frac{5}{11} \times 70$; ein und $\frac{5}{11} \times 70$ ist ähnlich $1\frac{5}{11} \times 7$; ein mal 7 ist 7; $\frac{5}{11} \times 7 = 5 \times \frac{7}{11}$; $5 \times \frac{7}{11}$ sind $\frac{35}{11}$; $\frac{35}{11}$ sind 3 und $\frac{2}{11}$; $3\frac{2}{11}$ zu $7 = 10\frac{2}{11}$; $1\frac{5}{11} \times 70$ ist also $10\frac{2}{11}$ Zig; 10 Zig ist 100;

$\frac{3}{11}$ Zig ist $2 \times \frac{10}{11}$; $2 \times \frac{10}{11} = \frac{20}{11}$; $\frac{20}{11} = 1\frac{9}{11}$; $1\frac{9}{11}$ zu 100 ist $101\frac{9}{11}$.

$\frac{7}{11} \times 170 = \frac{17}{11} \times 70$; $\frac{17}{11} = 1\frac{6}{11}$, folglich $1\frac{6}{11} \times 70$; ein mal 70 ist 70; $\frac{1}{11} \times 70$ ist $\frac{7}{11}$ Zig; $\frac{6}{11}$ sind $6 \times \frac{7}{11}$; $6 \times \frac{7}{11}$ sind $\frac{42}{11}$; $\frac{42}{11}$ sind $3\frac{9}{11}$, folglich $30\frac{2}{11}$ Zig; $\frac{2}{11}$ Zig sind $\frac{1}{11} \times 9$ weniger als 9; $\frac{9}{11}$ weniger als 9 sind $8\frac{2}{11}$; 8 und $\frac{2}{11}$ zu 30 sind $38\frac{2}{11}$; 38 und $\frac{2}{11}$ zu 70 sind $108\frac{2}{11}$.

$\frac{8}{11} \times 170 = \frac{17}{11} \times 80$; $\frac{136}{11} = 12\frac{4}{11}$, folglich $12\frac{4}{11} \times 80$; $1 \times 8 = 8$; $\frac{6}{11}$ mal 8 sind $6 \times \frac{8}{11}$; 6 mal $\frac{8}{11}$ sind $\frac{48}{11}$; $\frac{48}{11}$ sind $4\frac{4}{11}$; $4\frac{4}{11}$ zu 8 sind $12\frac{4}{11}$; $12\frac{4}{11} \times 80$ sind $12\frac{4}{11}$ Zig; 12 Zig ist 120; $\frac{4}{11}$ Zig sind $\frac{1}{11} \times 4$ weniger als 4; $\frac{4}{11}$ weniger als 4 sind $3\frac{7}{11}$; 3 und $\frac{7}{11}$ zu 120 werden $123\frac{7}{11}$; folglich sind $\frac{8}{11} \times 170 = 123\frac{7}{11}$.

$\frac{9}{11} \times 180 = \frac{18}{11} \times 80$; $\frac{18}{11}$ sind $1\frac{7}{11}$, folglich $1\frac{7}{11}$ mal 80; 1 mal 8 ist 8; $\frac{2}{11} \times 8$ sind $7 \times \frac{8}{11}$; $7 \times \frac{8}{11}$ sind $\frac{56}{11}$; $\frac{56}{11}$ sind $5\frac{1}{11}$; $5\frac{1}{11}$ zu 8 werden $13\frac{1}{11}$; $1\frac{7}{11} \times 80$ sind also $13\frac{1}{11}$ Zig; 13 Zig ist 130; $\frac{1}{11}$ Zig $= \frac{10}{11}$; folglich ist $\frac{8}{11} \times 180 = 130\frac{10}{11}$.

$\frac{9}{11} \times 180 = \frac{18}{11} \times 90$, oder $\frac{9}{11}$ sind $\frac{2}{11}$ weniger als 1, folglich $\frac{2}{11}$ weniger als 180; $\frac{2}{11} \times 18$ Zig sind ähnlich $\frac{2}{11} \times 18$; $\frac{1}{11} \times 18$ ist $1\frac{7}{11}$; $\frac{2}{11} = 2 \times 1$ und $2 \times \frac{7}{11}$; $2 \times \frac{7}{11}$ sind $\frac{14}{11}$; $\frac{14}{11}$ sind $1\frac{3}{11}$; 1 und $\frac{3}{11}$ zu 2 sind $3\frac{3}{11}$; $3\frac{3}{11}$ weniger als 18 sind $14\frac{8}{11}$; $\frac{2}{11}$ weniger als 180 sind also 14 und $\frac{8}{11}$ Zig; 14 Zig ist 140; $\frac{8}{11}$ Zig sind $\frac{8}{11}$ weniger 8; $\frac{8}{11}$ weniger als 8 sind $7\frac{3}{11}$; 7 und $\frac{3}{11}$ zu 140 sind $147\frac{3}{11}$; folglich ist $\frac{2}{11} \times 180 = 147\frac{3}{11}$.

$\frac{2}{11} \times 190 = 19 \times 90$; $\frac{19}{11}$ sind $\frac{3}{11}$ weniger als 2 Ganze, folglich sind auch $\frac{19}{11} = \frac{3}{11}$ weniger als 2×90; $2 \times 9 = 18$; $\frac{3}{11} \times 9$ sind $3 \times \frac{9}{11}$; 3 mal $\frac{9}{11}$ sind $\frac{27}{11}$; $\frac{27}{11}$ sind $2\frac{5}{11}$; $2\frac{5}{11}$ weniger als 18 sind $15\frac{6}{11}$; $15\frac{6}{11}$ Zig sind 150 und $\frac{6}{11}$ weniger als 6; $\frac{6}{11}$ weniger als 6 sind $5\frac{5}{11}$; $5\frac{5}{11}$ zu 150 sind $155\frac{5}{11}$; folglich sind $\frac{2}{11} \times 190 = 155\frac{5}{11}$.

$\frac{10}{11}$ mal 190 ist $\frac{1}{11}$ weniger als 19 Zig; $\frac{1}{11}$ mal 19 ist $1\frac{8}{11}$; $1\frac{8}{11}$ weniger als 19 sind $17\frac{3}{11}$; $1\frac{8}{11}$ weniger als 19 Zig sind $17\frac{3}{11}$ Zig; 17 Zig sind 170; $\frac{3}{11}$ Zig sind $\frac{2}{11}$ weniger als 3; $\frac{3}{11}$ weniger als 3 sind $2\frac{8}{11}$; $2\frac{8}{11}$ zu 170 sind $172\frac{8}{11}$; folglich sind $\frac{10}{11} \times 190 = 172\frac{8}{11}$.

$\frac{10}{11} \times 200$ ist $\frac{20}{11} \times 100$; $\frac{20}{11}$ ist $\frac{2}{11}$ weniger als 2, folglich auch $\frac{2}{11}$ weniger als 2×100; $\frac{1}{11} \times 100$ ist $9\frac{1}{11}$; $\frac{2}{11}$ mal 100 sind folglich $2 \times 9\frac{1}{11}$; 2 mal $9 = 18$; $2 \times \frac{1}{11}$ sind $\frac{2}{11}$; 18 und $\frac{2}{11}$ weniger als 200 sind $181\frac{9}{11}$; folglich ist $\frac{10}{11} \times 200 = 181\frac{9}{11}$.

Dieß ausführliche Beispiel sollte dem Lehrer nur die Norm geben, der er die Behandlung aller andern Zahlen anpassen muß. Der Lehrer versäume nicht sie pünktlich zu verfolgen, und an den Gang von Stufe zu Stufe anzuschließen. Denn der Schüler soll zu demselben Gang sich gewöhnen, soll die ganze Reihe von Anschauungen deutlich in sein Inneres auffassen, so wie er sie vor sich sah. Der Lehrer gebe nun noch einige Beispiele von mehrern größern Zahlen, z. B. $\frac{7}{11} \times 240$. Der Schüler wird gewiß gleich auflösen: $\frac{7}{11} \times 240$ ist $\frac{24}{11} \times 70$; $\frac{24}{11}$ ist $2\frac{2}{11}$; folglich $2\frac{2}{11} \times 70$; 2 mal 70 ist 140; $\frac{1}{11}$ mal 70 ist $6\frac{4}{11}$; $\frac{2}{11}$ ist 2×6 und $2 \times \frac{4}{11}$; 2×6 ist 12; $2 \times \frac{4}{11}$ sind $\frac{8}{11}$; 12 und $\frac{8}{11}$ zu 140 giebt $152\frac{8}{11}$. Dieß Resultat muß aus der vorhergegangenen Reihenfolge von Uebungen nothwendig folgen.

Hier gönne man dem Schüler die Freude, durch einige Beispiele der Zahl nach größere Aufgaben zu lösen. Er wird sich selbst überrascht fühlen, wenn er findet, daß die größere Zahlenmenge keinen Unterschied macht. Fordere man z. B., daß $\frac{8}{11}$ von 590 zu suchen sey, so wird er bald finden, daß es rathsam sey, die Zahlen zu verwandeln, das ist $\frac{59}{11} \times 80$; $\frac{59}{11}$ ist $5\frac{4}{11}$, folglich $5\frac{4}{11} \times 80$, das ist $429\frac{1}{11}$.

Dieselbe Uebung stelle der Lehrer auch mit der 13 an, und beobachte ganz denselben Gang. Er beginne mit $\frac{2}{13}$ mal 130 u. s. w. Es folgen dann die 17, und der Reihe nach alle die schon oben genannten Zahlen. Von einigen nur möge ein Beispiel hier stehen:

$\frac{12}{17} \times 230 = \frac{23}{17} \times 120$; $\frac{23}{17} = 1\frac{6}{17}$, folglich $1\frac{6}{17} \times 12$ Zig; ein mal 12 ist 12; $\frac{6}{17}$ mal 12 sind $6 \times \frac{12}{17}$; 6 mal $\frac{12}{17}$ sind $6 \times \frac{5}{17}$ weniger als 6 Ganze; $6 \times \frac{5}{17}$ sind $\frac{30}{17}$; $\frac{30}{17}$ sind $1\frac{13}{17}$; 1 und $\frac{13}{17}$ weniger als 6 sind $4\frac{4}{17}$; $4\frac{4}{17}$ Zig zu 12 Zig sind $16\frac{4}{17}$ Zig; 16 Zig ist 160; $\frac{4}{17}$ Zig sind $4 \times \frac{10}{17}$; $4 \times \frac{10}{17}$ sind $\frac{40}{17}$; $\frac{40}{17}$ sind $2\frac{6}{17}$; $2\frac{6}{17}$ zu 160 sind $162\frac{6}{17}$; folglich sind $\frac{12}{17}$ mal $230 = 162\frac{6}{17}$.

$\frac{11}{17} \times 420$ sind $\frac{42}{17} \times 11$ Zig; $\frac{42}{17}$ sind $2\frac{8}{17}$, folglich $2\frac{8}{17}$ mal 11 Zig; $2 \times 11 = 22$; $\frac{8}{17}$ mal 11 sind $8 \times \frac{11}{17}$; $8 \times \frac{11}{17}$ sind $\frac{88}{17}$; $\frac{88}{17}$ *) sind $5\frac{3}{17}$; $5\frac{3}{17}$ zu 22 ist $27\frac{3}{17}$; $27\frac{3}{17}$ Zig sind 270 und $\frac{30}{17}$; $\frac{30}{17}$ ist $1\frac{13}{17}$; $1\frac{13}{17}$ zu 270 giebt $271\frac{13}{17}$.

$\frac{14}{23} \times 690 = \frac{69}{23} \times 140$; $\frac{69}{23} = 3 \times \frac{23}{23}$, folglich 3×140; 3×14 Zig sind 42 Zig; 42 Zig sind 420; folglich sind $\frac{14}{23} \times 690 = 420$.

$\frac{13}{23} \times 850$ sind $\frac{85}{23} \times 130$; $\frac{85}{23}$ sind $3\frac{16}{23} \times 13$ Zig; $3 \times 13 = 39$; $\frac{16}{23} \times 13$ ist $\frac{7}{23} \times 13$ weniger als 13; $\frac{7}{23} \times 13 = 7$ mal $\frac{13}{23}$; $7 \times \frac{13}{23}$ ist $\frac{91}{23}$; $\frac{91}{23}$ sind $3\frac{22}{23}$; $3\frac{22}{23}$ weniger als 13 ist $9\frac{1}{23}$; $9\frac{1}{23}$ zu 39 ist $48\frac{1}{23}$; $48\frac{1}{23}$ Zig ist $480\frac{10}{23}$; folglich ist $\frac{13}{23}$ mal $850 = 480\frac{10}{23}$.

*) Hier hat der Schüler gleich Gelegenheit, von dem oben gelernten Aufsuchen eines Siebenzehentels von irgend einer Zahl Gebrauch zu machen. Es ist nämlich sichtbar, daß 88 8 mehr ist, als 4×20; 20 ist aber wiederum $\frac{3}{17}$ mehr, als 17; 4×20 muß also seyn $4 \times \frac{3}{17}$ mehr, als 4×17; $4 \times 3 = \frac{12}{17}$. Nun sind noch die 8 übrig: $\frac{1}{17}$ mal 8 ist $\frac{8}{17}$; $\frac{8}{17}$ zu $\frac{12}{17}$ giebt $\frac{20}{17}$; $\frac{20}{17}$ sind $1\frac{3}{17}$; $1\frac{3}{17}$ zu 4 sind $5\frac{3}{17}$. Diese Combination macht gewöhnlich der Schüler durch diese Analyse mit erstaunender Schnelligkeit, sobald bei der vorigen Stufe nichts übersehen ist.

Hier hat man abermals inne zu halten, um den Rest des schriftlichen Rechnens nachzuholen. Wir verließen dieselbe oben S. 315, weil die Anschauung und reine Abstraction noch nicht so weit gediehen war, um größere Zahlen zu theilen. Man muß alles erst begriffen, alles erst vollständig aufgefaßt haben, ehe man es mit Vortheil an Zeichen ketten kann.

Da wir nun mit der Theilung der Zahlen am Ziele sind, so wenden wir dieß alles noch an auf größere Summen.

Man stützt sich darauf, daß die Ordnung in Ansehung der Behandlung durchaus nichts ändert, und daß man mithin nur zur Erleichterung des Gedächtnisses sich nach Zeichen umsehe. Der Lehrer fängt mit Halben an, und läßt dieselben so fort, wie oben gezeigt ist, erst von wenigen, dann immer von größern Zahlen suchen.

Zuerst ist es nothwendig, daß der Schüler allezeit die Ordnung derjenigen Zahl ausspricht, von der er irgend einen Theil sucht. Das verliert sich aber allmählich, indem man sich daran hält, daß die Stelle hinreiche, um die erstere anzuzeigen. Man läßt also auch dieß blos Sache der Anschauung seyn; man läßt nur sehen, wie viel mal der Divisor in dem Dividend enthalten sey.

Die große Reihe von Regeln und Lehrsätzen, die sonst bei der Division, so wie bei einer jeden andern Species gegeben werden, wird man hier recht füglich ersparen, oder nach vollbrachter Arbeit nachtragen; dann werden sie verstanden und angewendet werden. Der Grund liegt ganz allein darin, weil man nicht eher über das, was man gethan, reflectiren kann, bis man die Handlung selbst vollbracht hat. Dann hat die Frage: — wie fingst du es an, um zu irgend einem Ziele zu gelangen? — auch erst einiges Interesse.

Der Lehrer merke sich vorzüglich, daß er bei den Divisionen mit kleinern Divisoren so lange weilen müsse, bis alle möglichen Fälle, die da vorkommen sollen, vorgekommen sind. Er übe, ehe er beginnt, die Zöglinge darin, von einer jeden, wenn auch noch so erhöhten Zahl einen jeden aliquoten Theil aufzufassen. Nachdem dieser gefunden, so lasse er die Operation, so wie das Resultat, auch schriftlich darstellen. Dazu wähle er vorerst eine einfache Zahl, z. B. 6; $\frac{1}{3}$ von 6 ist 2. Nun zeigt er, daß er dieß auch ausdrücken könne: drei ist in sechs zwei mal enthalten. Wenn man dieß aufschreiben wolle, so müsse das geschehen: 3 | 6 | 2. Jetzt fragt er weiter: wie viel ist ein Drittel von sechs Zig. Der Schüler wird antworten 20. Man läßt dieß abermals schreiben: 3 | 60 | 20. Dieselbe Uebung nimmt man mit 600, dann mit 6000, 60000 u. s. f. vor. Ist eine solche Uebung vollbracht, so bezeichnet man eine jede der Zahlen, die dazu erforderlich waren, mit einem besondern Namen. Dieß leitet man dadurch ein, daß man zuerst die Verrichtungen einer jeden bemerkt.

Die erste von den drei Zahlen ist diejenige, durch welche der Theil angedeutet wird, der da gesucht, oder durch welche die zweite Zahl getheilt werden soll. Die zweite Zahlenreihe bezeichnet die Summe, von welcher der eben genannte Theil zu nehmen ist, oder welche durch die erstere getheilt wird. Die dritte Zahl endlich deutet an: wie viel der aliquote, hier der dritte, Theil der zweiten Zahl beträgt? oder wie viel mal die erste in der zweiten enthalten ist? Diejenige Zahl, welche anzeigt, wie eine zweite getheilt werden soll, nennt man den Theiler oder Divisor; diejenige, von welcher irgend ein Theil gesucht werden soll, nennt man die zu Theilende, oder den Dividend; und diejenige, welche durch diese Theilung entsteht, oder welche anzeigt,

wie oft eine Zahl durch den gegebenen Divisor getheilt werden kann, nennt man den Wievieler, oder Quotienten.

Dadurch werden die Begriffe ganz bestimmt und deutlich aufgefaßt. Von nun an gebraucht man, der Kürze wegen, einen jeden dieser Ausdrücke frei, und man wird finden, daß sie immer deutlich verstanden werden *).

Nachdem dieß auf die eben beschriebene Weise durchgegangen ist, wählt man andere in Beziehung auf den Divisor ungleiche Zahlen, z. B. 7; $\frac{1}{3}$ mal $7 = 2\frac{1}{3}$. Man läßt das schreiben wie oben

3 | 7 | $2\frac{1}{3}$.

Ein Drittel mal sieben Zig ist $2\frac{1}{3}$ Zig, oder $23\frac{1}{3}$.

Geschrieben:

3	7	0	$23\frac{1}{3}$.
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

Man zeigt hier recht angelegentlich, daß der Divisor durchaus von einer jeden Zahl einzeln genommen werden müsse.

Man läßt dann ein Drittel von sieben Hundert suchen; natürlich auch zuerst aus dem Kopfe. Nachdem der Zögling $233\frac{1}{3}$ gefunden, so läßt man auch diese Operation schriftlich ganz nach Grundlage des Vorigen darstellen. Nämlich:

3	7	0	0	$233\frac{1}{3}$.
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

Dasselbe wiederholt man mit 7000 und so fort.

Nachdem dieses fertig geübt worden ist, läßt man die jedesmalige Benennung des aliquoten Theils

*) Ich habe nicht vergessen, daß ich diese Ausdrücke schon auf den frühern Seiten gebraucht. Aber man vergesse nicht, daß ich diese letzte Abtheilung blos für den Lehrer schreibe, dem diese Ausdrücke bekannt sind. Es kommt nur hier in Betrachtung, auf welche Weise und zu welcher Zeit sie zu des Zöglings Ohren und Verstande dringen sollen.

unter dem Dividend hinweg, indem man darauf hindeutet, daß es sich von selbst verstehe, daß der jedesmalige Rest Drittel seyn müsse, wenn der Divisor drei beträgt. Anstatt daß also vorher geschrieben wurde

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} 3 & 7 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \quad 233\frac{1}{3},$$

setzt man nun blos

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} 3 & 7 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad 233\frac{1}{3};$$

dieß muß man dann an größern Zahlen nachweisen.

Nachdem dieses geschehen, vergrößert man zunächst den Quotienten, wie dieß schon oben hinlänglich beschrieben ist. Man nimmt also an, daß $\frac{2}{3}$ von demselben Quotienten gesucht werden sollen. Dieß läßt man dadurch ausmitteln, daß man darauf aufmerksam macht, daß $\frac{2}{3}$ das Zweifache eines Drittels sey, mithin die zweifache Vermehrung des Quotienten das gesuchte Resultat herbeiführen werde. Man läßt darauf den Quotienten mit 2 multipliciren, und die Sache ist vollbracht.

Die weitere Ausführung bleibt dem Lehrer selbst überlassen, um so mehr, da die Sache, so wie der methodische Gang in der zweiten Abtheilung dieses Buchs, unter der Rubrik der Division, auseinandergesetzt ist.

Die letzte Veränderung nimmt man mit dem Divisor vor. Man vermehrt nämlich auch diesen. Dieß geschieht zunächst dadurch, daß man denselben um eine Ordnung höher rückt, also 30 nimmt, anstatt 3. Den dreißigsten Theil kann man, — wenn der Dividend aus mehrern Zahlen besteht, — natürlich nicht von 7, sondern man muß ihn von 70 nehmen. Man wird hier finden, daß 70 die 30 eben so viel mal enthalte, als 7 die 3 enthält. Nun setzt man aber 31, und wählt z. B. 60 zum Dividend. Hier wird man bald finden, daß man

anders zu operiren habe, als vorher. Denn die Eins muß natürlich auch in Anspruch genommen werden. Aus dem Kopfe hat man auch diese Uebung gemacht. Jetzt kommt es nur darauf an, wie sie am besten schriftlich darzustellen ist. Dieß wird sich aber bald ergeben, indem man darauf achtet, daß auch bei dem Divisor eine jede Zahl für sich allein betrachtet werden kann und muß. Man stellt dieß auf folgende Weise dar:

31	60	$1\frac{29}{31}$.
	39	
	2	

Man macht nämlich den Schüler zuerst darauf aufmerksam, daß hier jede Zahl zwei Stellen habe, und immer als in zwei Ordnungen getheilt gedacht werden müsse. Nun ist aber bemerkt worden, daß, wenn eine gleiche Ordnung mit einer gleichen dividirt wird, derselbe Quotient erfolge, und daß mithin kein Unterschied Statt finde, ob $\frac{1}{5}$ von 6, oder $\frac{1}{30}$ mal 60 genommen werde. Dieß ist auch hier der Fall. Allein auf der andern Seite kommt noch durch eine neue Zahl ein neues Verhältniß herein. Der zweite Theil, oder die zweite Ordnungszahl des Divisors muß bei dieser Vergleichung natürlich ebenfalls gleiche Rechte genießen. Sie muß daher auch noch Zahlen gleiches Ranges finden, in denen sie enthalten, oder von denen sie aliquoter Theil seyn kann. In dem obigen Beispiele würde die erste Ordnungszahl des Divisors rein zweimal in dem Dividend enthalten seyn. Allein es bliebe dann nichts übrig für die zweite, und der Quotient würde in dieser Beziehung zu viel betragen. Daher fließt denn die natürliche Regel: Man sucht zuerst den aliquoten Theil für die erste Ordnungszahl des Divisors. Dieser muß aber noch so viel Rest übrig lassen, daß die zweite, und wenn mehrere vorhanden sind, auch diese

in demselben Reste enthalten seyn können. Wenn daher ein Quotient genommen ist, bei dem kein, oder ein zu geringer, das ist ein kleinerer, Rest herausgekommen ist, als es die folgenden Zahlen des Divisors erheischen, so ist dieß ein Beweis, daß der Quotient zu hoch angenommen ist. Der letzte Fall trat in dem obigen Beispiele ein. Es muß daher ein niedrigerer Quotient genommen werden: also 1 anstatt 2. Jetzt ist der Quotient niedriger, und man erhält dadurch 29 als Rest. In diesem Reste ist die Eins 29 mal enthalten.

Den Rest zu finden ist nicht schwer, da er ja gerade das Zurückgebliebene von derjenigen Summe ist, welche entsteht, wenn man die Zahl, in welcher der Quotient gerade enthalten ist, von dem Ganzen abzieht.

Nehme man nun den Dividend höher, also 600, so muß dieser so getheilt werden, daß der Divisor in der ersten Ordnungszahl enthalten seyn kann, ohne daß sein Werth über die Einer hinaus zu gehen braucht. Man handelt vorerst so, als wenn nur zwei Zahlen da wären, und berücksichtigt die letzte Stelle gar nicht. Durch diese Verfahrungsart erhält man hier Folgendes:

31	60 / 29	0	1.

Zu der 29, die nach dieser Operation bleiben, zieht man nun natürlich die letzte Stelle der Zahl hinzu, und man erhält dadurch 290 als nächsten Dividend, von dem man nun ohne weitere Rücksicht weder auf das Vorhergehende, noch auf das Nächstfolgende den Quotienten aufsucht. Da man hier abermals drei Stellen hat, und die Zahl der ersten Stelle nicht die erste Zahl des Divisors erreicht, so müssen zu demselben Dividend zwei Stellen genommen werden. Man fragt also: 29, wie viel mal 3? das ist $9\frac{2}{3}$, das sind $\frac{29}{3}$, wenn man die

nächstfolgende Stelle mit zuzieht, und zugleich den zweiten Theil des Divisors mit in Anschlag bringt. Die Zwei schreibt man hin, und multiplicirt mit dem Quotienten die Eins, oder die zweite Ordnungszahl des Divisors, so hat man diejenige Zahl gefunden, welche den Divisor gerade neun mal enthält. Das Uebrige, das sind hier also $\frac{1}{3}\frac{1}{1}$, bleibt als Rest. Statt einer weitern Aufführung sey es mir erlaubt, lieber auf die schriftliche Anleitung, namentlich S. 255 ff., zu verweisen.

Man setze dieß dem Schüler deutlich auseinander, und man wird finden, daß er dann überall mit Einsicht und Verstand verfahren wird.

Damit aber dieß mehr mechanische Wesen keinen unnöthigen Aufenthalt mache, so setze ich noch folgende Regeln hinzu.

1) Man beobachte genau die angegebene Stufenfolge, und wolle ja nicht eher mit der schriftlichen Rechnung eine Operation erhellen, oder wohl gar erzwingen, die noch nicht mit dem Verstande begriffen ist. Ohne Verstand wird man nun einmal nicht Rechner, sondern nur eine Rechenmaschine, die da getrieben wird durch einen Strom von Regeln, welche man in den leeren Kopf gegossen hat; und eben so wird man ohne Rechnen nicht seines Verstandes Meister werden, weil dessen Operationen hauptsächlich ein Rechnen sind *).

2) Man lasse, ehe man durch schriftliches Rechnen ein Resultat finden lehren will, dasselbe zuvor als Sache des Verstandes durch Kopfrechnen herausbringen, damit dem Schüler die Richtigkeit und Zuverlässigkeit seines Verfahrens einleuchte.

3) Man gehe dann von Stufe zu Stufe, und lasse lieber ein einziges Beispiel vielfach anwenden,

*) Vergl. unsere Beiträge zur Erziehungskunst, 2ter Band, 16 Heft, S. 18 — 22.

ehe man die Seele mit einer Fluth des Mannigfaltigen und Mancherleien überschwemmt; weil es hier nicht auf die Breite, sondern auf die Tiefe der Operationen, nicht auf Ansichten, sondern auf Einsichten, ankommt.

4) Man lasse auch die schriftlichen Rechnungen analysiren, und von jeder einzelnen Operation sich eben so Rechenschaft geben, wie bei den blos abstracten Verstandescombinationen.

5) Man sehe das schriftliche Rechnen nicht als Hauptsache an, sondern nur als Unterstützung der reinen Zahlenverbindung und als sichtliche Darstellung der unsichtbaren Operationen des Verstandes.

Da die Regeln für das Aufsuchen eines aliquoten gleichen Theils auf diese Weise gefunden sind, so geht man nun über, auch die ungleichen Theile finden zu lehren.

Diese Uebungen schob man sonst in das Gebiet der Algebra hinüber; sie gehören aber nicht minder wesentlich, als die vorhergehenden, hieher; denn sie sind theils Anwendung, theils Erweiterung derselben.

Es wird hier nämlich das Verhältniß gegeben, welches zwischen den Theilen Statt finden soll. Es wird zuvor bestimmt, wie viel ein Theil größer oder kleiner, als der andere, seyn soll; und aus der Vergleichung dieser Differenz der Theile muß sich nachher das Facit ergeben.

Die Uebungen selbst, so wie die Erklärung desjenigen, was hier eigentlich geschehen soll, wird man von S. 56 bis 91 angedeutet und zum Theil auch ausgeführt finden.

Das methodische Verfahren ist folgendes: Man nimmt zunächst zwei Fünfer, setzt diese neben

einander, und spricht: 5 + 5 sind zwei gleiche Theile von 10. Man wählt die Fünf zunächst des dekadischen Systems wegen. Die erste Uebung hat nur den Zweck: Begriffe von gleichen und ungleichen Zahlen zu geben, und nachzuweisen, wie dieselben entstehen. Weil man aber bei allen diesen Uebungen auf dreierlei zu sehen hat, nämlich auf das Verhältniß der Theile, auf die Summe derselben, und auf den Betrag der Differenz, so macht man auch sogleich von vorn herein darauf aufmerksam.

Nachdem man also bemerkt hat, daß 5 + 5 gleiche Theile sind von 10, so setzt man eins zu 5, und zeigt, daß 6 + 5 ungleiche Theile von 11 sind, deren einer eins mehr oder eins weniger beträgt, als der andere. Jetzt setzt man noch eins zu 6, und läßt bemerken, daß 5 + 7 zwei ungleiche Zahlen sind, deren erste 2 weniger als die zweite, oder deren zweite 2 mehr betrage, als die erste, und die zusammen die Summe 12 machen.

Man setzt zu der größern Zahl noch eins, nimmt dann wiederum von derselben eben so nach und nach diejenige Zahl, welche die Theile ungleich macht, hinweg, bis sich beide hinwiederum gleich sind.

Hierauf läßt man drei Zahlen mit einander vergleichen. Man macht sie erst gleich, und vermehrt dann die zweite allmählich. Hier ist vornehmlich zu zeigen, daß ein Mehr auf der einen, und ein Minder auf der andern Seite dieselbe Differenz gebe, wenn nämlich die Vergleichung mit einer und derselben Zahl geschieht. Man setzt 5 + 5 + 5. Dann 5 + 6 + 5 sind drei ungleiche Zahlen, deren Summe 16 beträgt. Die erste Zahl ist eins weniger, als die zweite, und diese ist eins mehr, als die dritte. Doch die Uebungen selbst findet man ausführlicher S. 59.

Auf der zweiten Stufe wendet man sich zu einer neuen Zusammenstellung von Zahlen. Man setzt nämlich eine bestimmte Summe fest, die zunächst in zwei Theile getheilt wird. Dann läßt man die Ungleichheit der Theile dadurch entstehen, daß man dem einen nimmt, was man dem andern giebt, und sieht, welches neue Verhältniß der Theile dadurch hervorgeht. Die Uebung selbst ist hinwiederum S. 59 f. deutlich dargestellt. Man macht hier vornehmlich darauf aufmerksam, daß, wenn man dem einen Theile so viel nimmt, als man dem andern verleihet, der Unterschied der Theile allemal um das Doppelte wächst. Man muß den Zöglinge, wo möglich, selbst das Verhältniß finden lassen, indem man ihn auffordert, die ungleichen Zahlen anzusetzen. Dazu muß er immer sprechen, damit er sich das Dargestellte so bald als möglich vorstellen lerne.

Nachdem der Lehrer einige Uebungen dieser Art hat machen lassen, setzt er sogleich die Summe fest und den Unterschied der Theile. Er geht hier entweder von den aliquoten gleichen Theilen aus, oder von dem Ganzen, das er darein zerlegt. Im ersten Falle stützt er sich auf das, was der Zögling oben schon selbst bemerkte, daß der Unterschied nämlich allemal um das Doppelte wachsen müsse, wenn man mit derselben Zahl, mit welcher man den einen Theil vermindert, den andern vermehrt. Jetzt ist der Weg umgekehrt; man weiß schon den Unterschied der Theile, und muß daher nur sehen, welche Zahlen es seyn werden, die die verlangte Summe, und zugleich die Differenz der Theile, in sich begreifen werden. Man sucht, sobald die erste Uebung vorüber ist, die gleichen Zahlen, und dann sieht man die Zahl an, durch welche der Unterschied der Theile angedeutet ist. Dieser wird natürlich unter den beiden gleichen zertheilt, indem man nämlich dem einen Theile nur die Hälfte des

Unterschiedes entzieht, die man dem andern giebt. Dadurch muß die ganze Differenz natürlich herauskommen.

Das Beispiel: zwei ungleiche Zahlen, deren Summe 30, und deren Unterschied 8 beträgt, wird so analysirend dargethan: zwei gleiche Theile von 30 sind 15 + 15. Wenn ich die 8 der einen 15 weg nehme, so wäre allerdings der Unterschied vorhanden, aber nicht mehr das Ganze, denn dieses wäre um diese 8 vermindert. Gebe ich aber die 8 dem zweiten Theile, so bleibt zwar das Ganze, aber nicht der Unterschied; denn die eine Zahl hat sich um 8 vermindert, und folglich schon dadurch den ganzen Unterschied allein gemacht; die andere hat sich um 8 vermehrt, und auch ihrer Seits den Unterschied gemacht; beide zusammen genommen haben daher die doppelte Differenz, also 16. Dieß alles muß der Zögling mit Augen sehen. Um also beide Bedingungen zu erfüllen, sieht man, daß es nur einen Weg giebt. Nämlich man nimmt von der einen gleichen Zahl die Hälfte des verlangten Unterschiedes, und läßt sehen, daß dadurch das Ganze dieß verloren habe. Soll das nicht seyn, so müssen sie einem der Theile gegeben werden. Werden sie dem ersten Theile, von welchem sie genommen sind, wieder verliehen, so schwindet der Unterschied. Giebt man sie der zweiten Zahl, so mehrt sich diese um so viel, als die erste verlor. Da der ersten der halbe Unterschied genommen wurde, und die zweite so viel, das ist also auch $\frac{1}{2}$, gewann, so entsteht dadurch natürlich der ganze Unterschied, ohne daß das Ganze verändert worden.

Auf diese Weise erklärt man das Wachsen und Fallen des Unterschiedes. Wenn dieses geschehen ist, zeigt und spricht man dem Schüler die ganze Uebung in einer bestimmten Form vor, in der man sie sich denn auch wiederholen läßt. Davon mag hier ein Beispiel stehen:

a) 20 + 20 sind zwei gleiche Zahlen, deren Summe 40 beträgt. Wenn ich von der einen Zahl 5 nehme, so entstehen zwei ungleiche Zahlen, von welchen eine 5 weniger ist als 20, 20 − 5 = 15, und deren Summe ebenfalls 5 weniger beträgt als 40.

b) Wenn ich die Fünf von der einen Zahl nehme, und zu der andern thue, so wird die eine um fünf weniger als 20, und die andere 5 mehr als 20; fünf weniger als 20 ist 15, fünf mehr als 20 ist 25; 15 + 25 ist 40; der Unterschied zwischen 15 und 25 ist aber 10; folglich sind 15 + 25 zwei ungleiche Zahlen, deren Summe 40, und deren Unterschied 10 beträgt. Denn von den gleichen Zahlen hat eine um eben so viel gewonnen, als die andere verloren, folglich ist die Summe beider Zahlen geblieben.

c) Wenn ich zwei ungleiche Zahlen suchen soll, deren Summe 40, und deren Unterschied 10 beträgt, so nehme ich zuerst zwei gleiche Zahlen, die 40 betragen, nämlich 20 + 20. Von der einen Zahl nehme ich dann die Hälfte des Unterschiedes oder ½ von 10, und gebe dieß der andern gleichen Zahl, so wird die eine Zahl um eben so viel vermindert, als die andere sich mehrt; ½ von 10 ist 5; 5 von 20 bleibt 15; und 5 zu 20 macht 25; es sind daher 15 + 25 die gesuchten ungleichen Zahlen.

d) Wenn beide Zahlen 15, mithin der kleinsten gleich wären, so würde die Summe um 10, also gerade die Differenz der Theile, kleiner seyn als 40. Wenn beide Zahlen 25 oder der größten gleich wären, so würde ihre Summe 50, mithin gerade 10, oder die Differenz der Theile, mehr seyn als 40.

e) Wenn ich daher von der Summe 40 die Differenz 10 nehme, und diese in zwei gleiche Theile zerlege, so erhalte ich zwei Zahlen, deren jede gerade so groß ist, als die kleinste der ungleichen Zah-

len. Gebe ich diese Differenz der andern Zahl, so wird diese 25. Wenn ich dagegen die Differenz noch zu der Summe thue, so wird die Zahl 10 mehr als 40, das ist 50; funfzig in zwei gleiche Theile giebt 25 + 25, folglich gerade den größten der beiden ungleichen Theile. Wenn daher dem einen derselben diese 10 genommen werden, so hat man die kleinste der gesuchten ungleichen Zahlen gefunden.

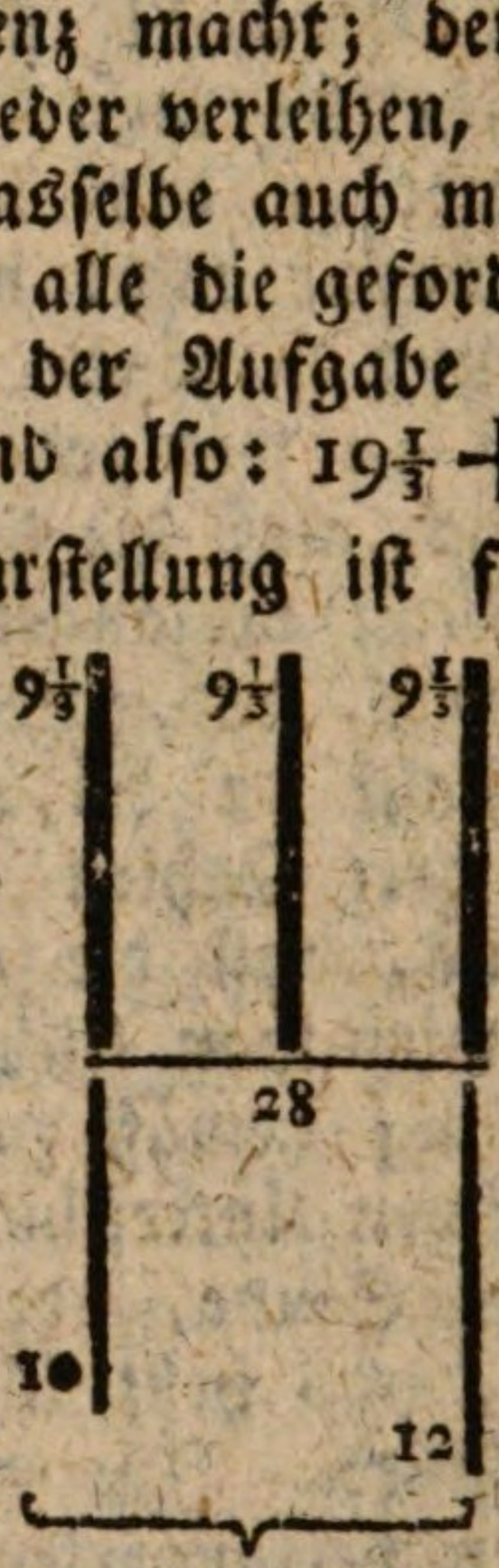
Man veranschaulicht dieß Verfahren deutlich, und sucht es so einleuchtend als möglich darzustellen, daß es einerlei sey, auf welchem Wege man zu der Differenz gelange, ob man die Hälfte derselben dem einen der gleichen Theile von der bekannten Summe entzieht, und diesen der andern verleihet, wodurch denn der Unterschied sowohl, als die Differenz der Theile, entstehen muß, oder ob man gleich von der Summe die ganze Differenz der Theile einstweilen nimmt, und diese dem einen der aliquoten gleichen Theile des Restes verleihet, so, daß man dadurch den Unterschied der Theile selbst macht; oder endlich, ob man sich diesen Unterschied durch Vergrößerung der kleinern Theile aufgehoben denkt, indem man den Rest gleich der ganzen Zahl giebt, von der dadurch entstandenen Summe die Hälfte sucht, und nun dem einen derselben den ganzen Unterschied wieder nimmt, wodurch natürlich auch das Zuviel, welches auf diese Weise erst der Summe verliehen wurde, wieder genommen ist.

Die Uebungen selbst sind oben schon ausführlicher, so wie die Auseinandersetzung mit Beihülfe der Versinnlichungsmittel mit möglichster Klarheit gegeben. Ich beschreibe hier noch eine Veranschaulichung derselben Operationen, die jener Zusammenstellung der Zahlen, von der oben die Rede war, am besten folgen wird, da sie bei zusammengesetz-

ten Zahlen vorzüglich anwendbar, und der Abstraction näher gelegen ist. Man zeichnet nämlich so viel Striche an eine Tafel, als ungleiche Zahlen zu suchen sind. Wenn drei ungleiche Zahlen gefunden werden sollen, so macht man drei gleich lange Striche. Nun werden die Theile bestimmt. Zum Beispiel: die erste Zahl ist 10 mehr als die zweite. Hier verlängert man sogleich den ersten Strich, und schreibt zu dem verlängerten Theile der Linie Zehn, damit man nicht vergesse, wie viel die Verlängerung beträgt. Setzen wir nun: die zweite Zahl sey 12 weniger als die dritte, so schließt man: folglich muß die dritte 12 mehr seyn als die zweite. Man verlängert diesem Schlusse gemäß die dritte Linie, und schreibt diesem verlängerten Theile die Zahl 12 bei, so sieht man den Unterschied aller drei Zahlen deutlich vor sich. Wissen wir drittens, daß die Summe aller drei Zahlen sey 50, so wird man leicht im Stande seyn, der obigen Anweisung gemäß zu verfahren. Entweder nimmt man den Unterschied der Theile weg, und behält ihn im Sinne, oder man macht alle drei Zahlen gleich, und hebt also durch Vermehrung ihren Unterschied. Im erstern Falle löscht man auch die oben verlängerten Linien aus, und schreibt nur ihren Ertrag an. Dadurch sieht man, daß alle drei gleich sind der zweiten, das ist der kleinsten Zahl. Da man die Linien weggenommen hat, so muß man auch ihren Betrag von der ganzen Summe nehmen, welche diese ungleichen Zahlen ausmachen. Durch diesen Abzug erhält man diejenige Zahl, welche da seyn würde, wenn der Unterschied der Theile nicht vorhanden wäre, oder wenn alle drei Zahlen gleich wären der kleinsten. Da der Unterschied, oder die verlängerten Linien, 10 + 12 waren, so nimmt man diese beiden Zahlen, das sind 22, von 50; es bleiben 28. Diese Summe wäre also der Betrag der drei Zahlen,

wenn alle gleich wären der zweiten. Natürlich müßte nun eine jede derselben den dritten gleichen Theil der ganzen Summe 28 enthalten. Der dritte Theil von 28 ist aber $9\frac{1}{3}$. Weiß man erst, wie viel eine jede Zahl beträgt, wenn keine Differenz der Theile Statt findet, so weiß man auch, wie viel sie mit der Differenz macht; denn man darf nur der ersten Zahl wieder verleihen, was man ihr vorher nahm, und dasselbe auch mit der dritten Zahl thun, so hat man alle die geforderten Zahlen, und alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Die ungleichen Zahlen sind also: $19\frac{1}{3} + 9\frac{1}{3} + 21\frac{1}{3}$.

Die Darstellung ist folgende:



Man schreibt diese Zahlen nicht zugleich hin, sondern nur zunächst die Aufgabe, das ist hier die 50 und $10 + 12$. Dann zieht man den wagerechten Strich, und zeigt durch diesen an, daß man vor der Hand den Unterschied oder die vergrößerten Zahlen nicht berücksichtigen wolle. Man sieht hier mit Augen, daß man dadurch auch der Zahl 50 die 22 genommen, und folglich 22 weniger erhalten habe als 50. 22 weniger als 50 ist aber 28. Diese 28 setzt man gerade unter diejenigen Striche, welche die Zahl darstellen, die vorhanden wäre, wenn kein Unterschied Statt fände.

Man giebt gleich darauf auch ein Beispiel von der andern Verfahrungsart, bei welcher man nämlich den Unterschied durch Vergrößerung der Zahlen aufhebt.

Wir wollen dasselbe Beispiel beibehalten:

Man verlängert auch hier, wie oben, der Aufgabe gemäß die Striche, und giebt dem ersten 10, dem dritten 12 mehr. Man macht dann den zweiten Strich gleich dem dritten, weil dieser die größte Zahl vorstellt. Man sieht wohl, daß dieser zweite Strich 12, der erste aber 2 erhalten müßte, um dem dritten gleich zu seyn. Dadurch hat die ganze Zahl $12 + 2$, das sind 14, mehr bekommen, als sie haben sollte. Man muß also diese 14 der ganzen Summe borgen, um die größte Zahl zu finden: $50 + 14 = 64$; der dritte Theil von 64 ist $21\frac{1}{3}$; dieß ist die größte Zahl. Die zweite muß 12 weniger seyn; 12 weniger als $21\frac{1}{3}$ ist $9\frac{1}{3}$. Die erste ist nur 2 weniger, das ist $19\frac{1}{3}$. Auf diese Weise hat man auch die 14 der ganzen Summe wieder genommen, die sie vorher erhalten hatte.

Die Darstellung ist folgende:

Es muß endlich noch gezeigt werden, daß es auch durchaus keinen Unterschied macht, wenn man alle drei Zahlen mit der ersten vergleicht.

Hier nimmt man zu der ersten, der Aufgabe gemäß, 10, und zu der dritten 12. Da alle Zahlen der ersten gleich gemacht werden sollen, so zeigt es sich jetzt sehr vernehmlich, daß die zweite Zahl 10 zu wenig, die dritte aber zwei zu viel enthält. Um alle Zahlen gleich zu machen, nimmt man von der dritten zuerst den Ueberfluß, das sind 2, und giebt sie derjenigen Zahl, welche 10 zu wenig ist. Dadurch wird bewirkt, daß die zweite nur 8 weniger beträgt. Diese 8 giebt man ihr einstweilen; und, indem man das thut, so vermehrt man auch die ganze Summe um 8. Daher hat man 8 mehr als 50: $50 + 8 = 58$. Der dritte Theil davon muß diejenige Zahl seyn, an welcher die übrigen gemessen wurden, das war hier die erste. Der dritte Theil von 58 ist aber $19\frac{1}{3}$. Von dieser Zahl aus gerechnet ist die zweite 10 weniger, die dritte 2 mehr. Indem also die 10 hier genommen, und zwei davon dort wiedergegeben werden, so bleiben die 8 übrig, die vorher mehr genommen wurden, und die zweite Zahl wird $19\frac{1}{3} - 10 = 9\frac{1}{3}$, die dritte $19\frac{1}{3} + 2 = 21\frac{1}{3}$.

Die Darstellung ist folgende:

Man wird hier zwar sehen, daß jede Uebung zum richtigen Resultate führt; aber es wird auch in die Augen fallen, daß die erste die einfachste und anschaulichste ist. Indeß muß der Zögling mit einer jeden Auflösung sich befreunden, weil jede ihm, wenn auch nicht allemal unmittelbar, so doch in unzähligen Fällen mittelbar wesentliche Dienste leistet. Dieß wird sich vornehmlich bei der weitern Anwendung dieser Uebungen bewähren.

Die folgenden Uebungen werden weiter ausgedehnt, indem theils die Anzahl der Zahlen vermehrt wird, theils auch die Vergleichung nicht mehr mit einer, sondern willkührlich auch mit jeder andern Zahl geschieht.

Zunächst läßt man die neben einander liegenden Zahlen mit einander vergleichen. Man setzt die erste als die kleinste, und bestimmt dann, wie viel die zweite größer als die erste, die dritte größer als die zweite u. s. f. angenommen werden soll.

Die Veranschaulichung geschieht hier auf keine andere Weise als oben. Man geht ebenfalls von gleichen Strichen aus, und verlängert einen jeden derselben der Aufgabe gemäß. Man wird bald sehen, daß, wenn das Wachsthum auf diese Weise fortgeht, die zweite Zahl die erste ganz und die Differenz zwischen ihr und jener, die dritte Zahl die zweite ganz und die Differenz zwischen ihr und der zweiten, die erste ebenfalls ganz und die Differenz zwischen der ersten und zweiten, und auch zwischen der zweiten und dritten enthalten müsse.

Als Beispiel stelle der Lehrer auf: Es sollen vier ungleiche Zahlen gefunden werden, deren zweite 10 mehr als die erste, die dritte 15 mehr als die zweite, die vierte 20 mehr als die dritte, und

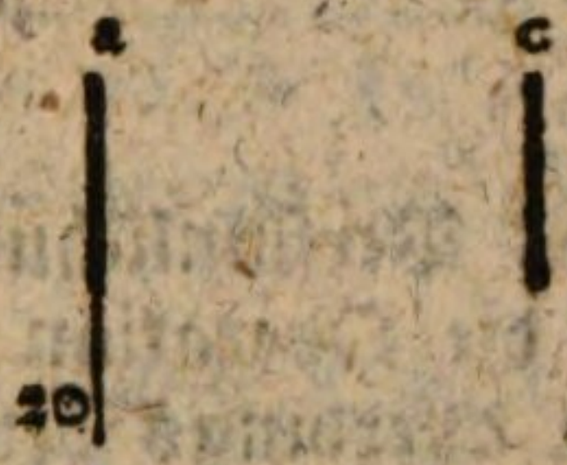
deren Summe 150 betragen mag, so wird er dieß durch Striche folgender Gestalt veranschaulichen:

Der Lehrer räsonnirt mit dem Zöglinge ganz, wie es das Auge lehrt; also: die zweite Zahl ist zehn mehr als die erste; (dieß sieht er); die dritte ist 15 mehr als die zweite; (auch dieß steht da). Nun zeigt man, daß die dritte Zahl mit der ersten verglichen, außer der 15 auch die 10, mithin 15 + 10 = 25 mehr enthalte, die vierte aber, außer der neu hinzugekommenen 20, noch 25, das sind 45, mehr seyn müsse als die erste. Wenn man diesen ganzen Unterschied der Theile, oder alle Verlängerungen der Linie, hinwegnimmt, so hat man den Punkt, wo die vier Linien sich gleich sind, und wenn man daher auch von der gegebenen Summe den Ertrag der Differenzen nimmt, so bleibt als Rest noch übrig diejenige Zahl, welche vorhanden wäre, wenn alle vier Zahlen gleich wären der ersten. Der vierte Theil von dieser noch zurückgebliebenen Summe giebt also den Betrag der ersten Zahl. Da die Differenz 10 + 25 + 45, das sind 80, ist, so bleibt nach Abzug derselben von der Summe 150 noch 70 übrig. Der vierte

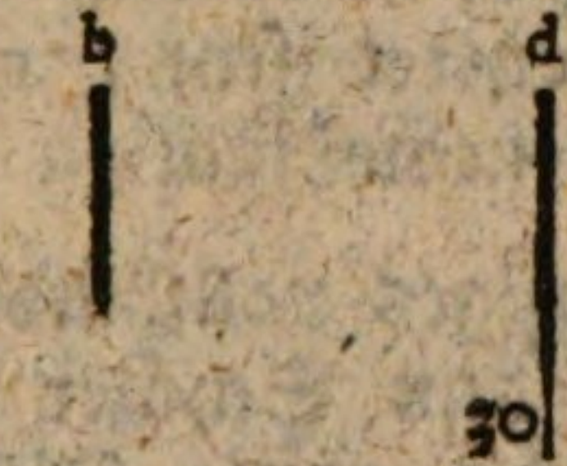
Theil von 70 ist 17½. Hat man diesen ersten und kleinsten Theil erst gefunden, so setzt man, der Forderung gemäß, alle Differenzen an, und läßt sie den Schüler durch Addition finden.

Als Beispiel mag uns die im ersten Theile S. 88 und 89 aufgelöste Aufgabe dienen.

Die Aufgabe ist dort: 300 soll in vier ungleiche Zahlen getheilt werden. Die erste ist 20 mehr als die dritte. Hier macht der Lehrer sogleich den ersten und dritten Strich, und verlängert den ersten mit der Beischrift 20:

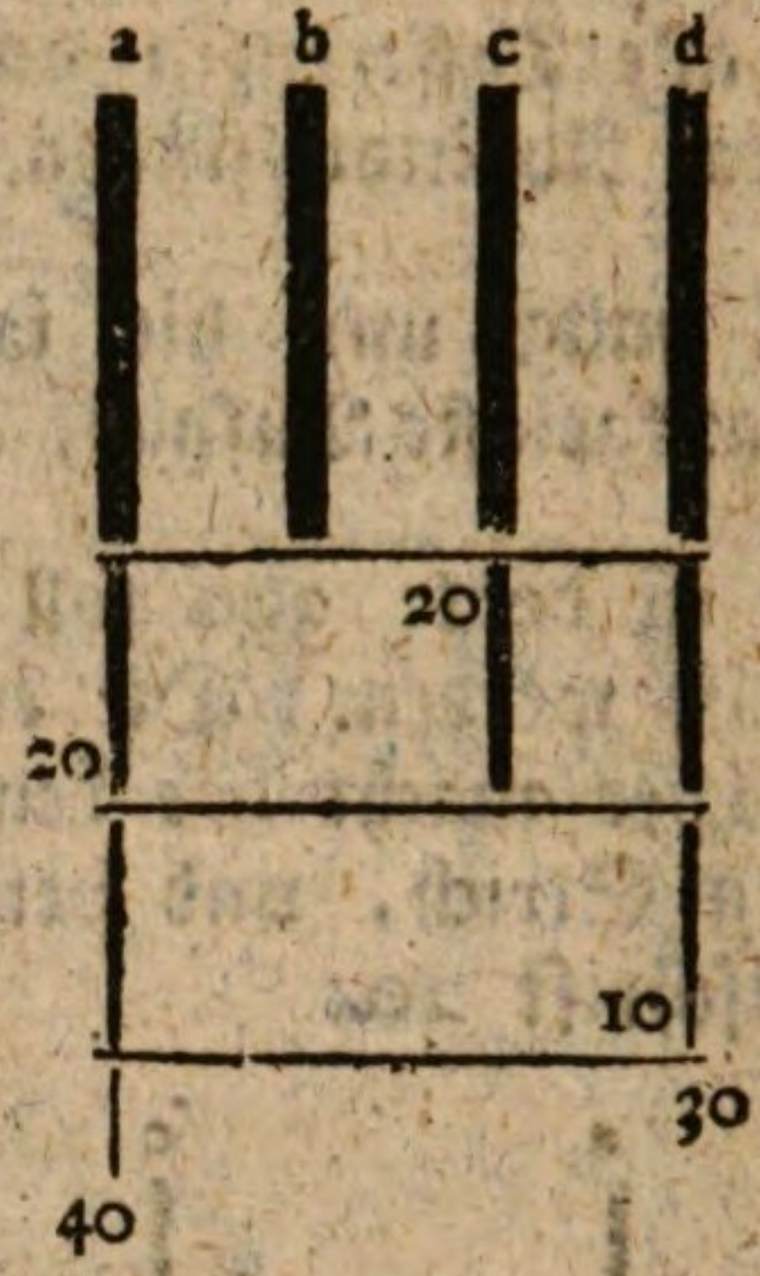


In der Aufgabe heißt es weiter: die zweite ist 30 weniger als die vierte; dargestellt:



und 40 weniger als die erste. Da die zweite Zahl 40 weniger ist als die erste, so darf diese nicht mit der ersten einen gleich langen Strich behalten, sondern dieser muß verkürzt werden, und an den Raum, der dadurch entstand, wird dann die Zahl 20 beigeschrieben. Dadurch wird die Linie 20 kürzer als die dritte, weil dieß die Differenz zwischen der ersten und dritten Zahl ist, und die vierte Zahl bekommt dreißig mehr. Man wird also jetzt von der zweiten Zahl ausgehen, und nach dieser alles messen.

Vollständige Darstellung:



Man muß dieses Versinnlichungsmittel so lange anwenden, bis die Operation völlig abstrahirt ist; dann muß man allerdings den Schüler gewöhnen, die bloße Abstraction innerlich zu schauen; denn wenn dieß dem Zögling geläufig ist, dann erst ist es reine Zahlencombination. Angeschauet mußte erst alles concret seyn, ehe man sich bis zur abstracten Zahlencombination erheben darf.

Ich setze ein einziges vollständiges Beispiel von denen her, welche dem Schüler gegeben werden, um sich zu üben, die ganze Differenz der Theile zu finden.

Aufgabe.

Fünf ungleiche Zahlen:

$$A = 70 > B,$$
$$B = 60 < C,$$
$$C = 80 > D,$$
$$D = 50 < E,$$

welches ist die Summe der ganzen Differenz?

D = 50 < E.

E = 50 > D; Differenz ED = 50.
C = 80 > D; Differenz CD = 80.

B = 60 < C.
C = 80 > D.

B = 80 − 60 > D.
80 − 60 = 20; Diff. BD = 20.

A = 70 > B.
B = 20 > D.

A = 70 + 20 > D.
70 + 20 = 90; Diff. AD = 90.

Die ganze Differenz ist:

50
80
20
90

240

So wird der Schüler geübt, um die Summe der Differenzen zu finden. Dann erst folgen Aufgaben, bei denen dieselben Regeln befolgt werden, so wie man die ganze Darstellung auch beibehält.

Auch davon noch ein Beispiel.

Tausend in fünf ungleiche Theile getheilt:

A = 90 > B;
B = 70 < C;
C = 80 < D;
D = 200 > E.

D = 200 > E; Differenz DE = 200.
C = 80 < D.

C 200 — 80 > E.
200 — 80 = 120; Diff. CE = 120.

B = 70 < C.
C = 120 > E.

B = 120 — 70 > E.
120 — 70 = 50; Diff. BE = 50.

A = 90 > B.
B = 50 > E.

A 90 + 50 > E.
90 + 50 = 140; Diff. AE = 140.

510.

1000 — 510 = 490; $\frac{1}{5}$ × 490 = 98.

E	= 98		= 98
D	= 98	+ 200	= 298
C	= 98	+ 120	= 218
B	= 98	+ 50	= 148
A	= 98	+ 140	= 238
			1000

Es ist leicht einzusehen, daß man dieselben Verhältnisse auch auf schriftliche Rechnung anwenden muß. Dieß geschieht, wenn die Zahlen zu einer weniger zu übersehenden Größe sich heben.

Es wird sich gleich zeigen, daß das ganze Verfahren gar nichts anders sey, als das bisher Erörterte. Man vergleicht nämlich die Differenzen, subtrahirt diese von der ganzen Summe, nimmt dann den dadurch gefundenen Rest, und dividirt ihn mit derjenigen Zahl, welche andeutet, wie viele ungleiche Theile gefunden werden sollen.

Gesetzt die Summe wäre 278394. Diese sollte in 8 ungleiche Theile getheilt werden, die nach folgenden Verhältnissen gewachsen seyn mögen.

A = 724 > B,
B = 617 > C,
C = 529 > D,
D = 283 < E,
E = 347 > F,
F = 152 < G,
G = 423 > H.

G =	423	> H.		423
F =	423	— 152	*)	271
E =	271	+ 347	**)	618
D =	618	— 283	***)	325
C =	325	+ 529		854
B =	854	+ 617		1471
A =	1471	+ 724		2195
				6157

Da diese Differenz dem Obigen gemäß von der ganzen Summe abgezogen werden muß, um diejenige Zahl zu finden, die, in gleiche Theile getheilt, die kleinste der ungleichen Zahlen giebt, so setzt man obige Summe als Subtrahendus, und die

*) 152 muß subtrahirt werden, weil F so viel weniger ist.

423
152
271

**) Man sieht, daß hier Addition erforderlich ist.

271
347
618

***) Hier muß hinwiederum subtrahirt werden

618
283
325

denn es ist ja so viel weniger als E.

Differenz als Minuendus an, und verfährt nach den Regeln der Subtraction.

278394
6157
272237

Durch diese Subtraction ist die Differenz der Zahlen aufgehoben, und der Punct gefunden, wo sie alle gleich sind der kleinsten unter ihnen, und diese kleinste ist hier H. Wenn man daher den achten Theil des eben gefundenen Restes sucht, oder den Rest durch 8 dividirt, so hat man die Summe, welche zu H gehört.

8	27	2	2	3	7	$34029\frac{5}{8}$
	ℨ	o		ℳ	5	

Man setzt nun die Differenzen, der Aufgabe gemäß, dazu.

H	$34029\frac{5}{8}$ *)		=	$34029\frac{5}{8}$
G	—	+ 423	=	$34452\frac{5}{8}$
F	—	+ 271	=	$34100\frac{5}{8}$
E	—	+ 618	=	$34647\frac{5}{8}$
D	—	+ 325	=	$34354\frac{5}{8}$
C	—	+ 854	=	$34883\frac{5}{8}$
B	—	+ 1471	=	$35500\frac{5}{8}$
A	—	+ 2195	=	$36224\frac{5}{8}$
				278194

Man sieht, daß man auf diese Weise die größten Summen, ohne sonderliche Mühe, nach Gefallen in ungleiche Theile zerlegen kann. Man mag aber nebenher auch einsehen, daß die schriftliche Rechnung durchaus nichts anders ist, als Anwendung der reinen Zahlencombination auf größere, schwerer zu übersehende Summen, daß man daher

*) Dieß ist nämlich die allen gemeinschaftliche Zahl, ohne die Differenz in Anschlag zu bringen; zu ihr muß eine jede Differenz addirt werden.

mit dem Kopfe, und nicht mit der Feder rechnen lernen müsse, und daß in den kleinern Zahlen alle Verhältnisse erst zu suchen seyen, ehe es möglich ist, Summen zu behandeln, die man nicht mehr mit seinem Verstande erreichen kann, und bei denen die Richtigkeit des Verfahrens sich einzig auf die treue Befolgung der Regel stützt.

Nach diesen Vorübungen bedarf es wohl kaum noch ausführlicherer Anweisungen für den Lehrer, um die Versinnlichungsmittel anzugeben, welche anzuwenden sind, damit verwickeltere Verhältnisse mit gleicher Leichtigkeit gefunden werden. Der Schüler wird sich nun gewöhnen, von der sichtlichen Darstellung abzusehen, um durch die innere Anschauung ein desto treueres Bild der arithmetischen Größe zu empfangen. Die gegenwärtige Uebung ist die letzte, bei deren Beginnen allenfalls noch die äußere Anschauung willkommen seyn mag. Indeß wird hier mit Macht schon vorgearbeitet zur Abstraction.

Zuerst ist nur nachzuweisen, daß die Größe der Theile, so wie der Ganzen, wesentlich auf Verhältnisse beruhet, und daß mithin, wenn auf zweien Seiten gleich viel Theile einer und derselben Art vorhanden sind, kein anderes Verhältniß Statt finden kann, als das zwischen eins und zwei u. s. f.

Es wird daher abermals erst eins und eins aufgestellt, dann zwei und zwei; und nun wird darauf hingewiesen, und gesprochen: $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$ u. s. f. (S. 93.)

Der Schüler sieht, daß auf der einen Seite so viel sind, als auf der andern sich befinden, und mithin immer ein gleiches Verhältniß Statt finde, als oben, wo nur eins und eins neben einander standen. Eben so muß es mit Dritteln und Vierteln u. s. w. gehen.

Es wird bald dahin kommen, daß der Schüler die Verhältnisse findet, ohne der Augen zu bedürfen. Hauptsächlich muß der Lehrer den Schüler üben, schnell zu finden, wie viel aliquote Theile zu irgend einer Zahl gehören. Es muß ihm geläufig seyn, wie viel Achtzehentel zu einem Halben, wie viel zu einem Drittel, zu einem Sechstel u. s. f. erforderlich sind. Die Uebung dazu ist gegeben, die Vorbereitung genugsam gemacht.

Soll dieß auf schriftliche Rechnung angewendet werden, so gilt die Regel: Wenn Zähler und Nenner mit gleichen Zahlen dividirt werden können, so läßt sich der Bruch verkleinern oder heben, und man muß daher, wenn man dieses thun will, einen gemeinschaftlichen Divisor suchen, der in beiden Zahlen aufgeht. Die Quotienten bleiben dann in derselben Qualität, als die Divisoren. Diejenigen Quotienten, welche aus dem Zähler entstehen, sind hinwiederum Zähler, und diejenigen, welche aus den Nennern hervorgehen, hinwiederum Nenner des verkleinerten Bruches.

Um aber den gemeinschaftlichen Divisor zu finden, nimmt man die Differenz zwischen Zähler und Nenner, und sieht, ob dieser sich entweder ganz oder aufgelöset in beide dividiren lasse, ohne daß ein zweiter Rest bleibt. Wenn man z. B. $\frac{250}{300}$ hat, so nimmt man den Unterschied, der hier 50 beträgt, und sieht, daß dieser in 250 fünf mal, in 300 aber sechs mal vorhanden sey; man schließt daraus ganz richtig, daß $\frac{250}{300}$ gleich seyen $\frac{5}{6}$. Ist der Zähler aber um ein Bedeutendes kleiner als der Nenner, so muß der erstere gleich in den letztern hineindividirt werden, und dann ist der Divisor von dem Dividend ein eben so viel bedeutender Bruch, als die Eins von dem Quotienten. Z. B. $\frac{2}{10}$; 2 ist in 10 fünf mal; es ist daher $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Die

Die eben beschriebene Uebung ist nur als Vorbereitung der folgenden anzusehen, die in der ganzen Arithmetik sehr wichtig ist, und das eigentliche Wesen der Proportionalrechnung in sich begreift. Es ist nämlich nur aus einem oder mehreren gegebenen Theilen das Ganze zu finden. Diese Uebung kommt überall vor, wo Verhältnisse sich zeigen. Wenn die Aufgabe gegeben wäre: Wenn 5 Ellen kosten 40 Rthlr., was kosten 9 Ellen? so liegt darin durchaus nichts anders, als die Aufgabe: Welches ist diejenige Zahl, von welcher die 40 fünf mal der neunte Theil ist? So viel mal als die Fünf hier wiederholt werden muß, um der 9 zu gleichen, eben so viel aliquote mal wird man auch die Vierzig wiederholen müssen.

In Ansehung der Methodik ist vornehmlich dahin zu sehen, daß der Schüler gewöhnt werde, die Beziehung der Theile unter sich selbst sich deutlich vorzustellen. Gewöhnlich bezieht man dieselben auf das imaginäre Ganze, und erschwert sich dadurch die Auflösung ungemein. Aber es ist klar, daß, wenn ich aus der Wiederholung gegebener Theile ein Ganzes finden will, nicht Theile des Ganzen, sondern Theile der Theile zu nehmen seyn, indem ja eben das Ganze aus Theilen gebildet werden soll. Also, wenn fünf Neuntel vorhanden sind, nicht Neuntel, sondern nur Fünftel des Vorhandenen wiederholt werden können.

Dieß ist sehr leicht zu veranschaulichen. Man setzt zuerst 2 an, und spricht: Zwei sind zwei Drittel eines Ganzen; ein Drittel ist ein halb mal zwei Drittel; ein und ein halb mal $\frac{2}{3}$ giebt drei Drittel; also wenn zwei Drittel vorhanden sind, fehlt noch ein Halb der zwei Drittel, um drei Drittel zu empfangen. Hier sieht man es auch recht deutlich, daß nur die aliquoten Theile von dem Vorhandenen wiederholt werden können. Man wiederholt

dasselbe Beispiel ganz nach der S. 100 gegebenen Anleitung mit Vierteln. Hier setzt man zunächst 4 an, und bezeichnet diese durch $\frac{4}{4}$. Man zeigt nun zuerst auf die Eins, indem man spricht: $\frac{4}{4}$ ist 4 mal $\frac{1}{4}$. Dann nimmt man je zwei und zwei Viertel zusammen, und spricht: $\frac{4}{4}$ ist $2 \times \frac{2}{4}$. Hierauf stellt man endlich 3 zusammen, und eins allein, und spricht: $\frac{4}{4}$ ist $1\frac{1}{3}$ mal $\frac{3}{4}$. Ganz so geht man alle Uebungen durch, die S. 100 bis 102 angegeben sind.

Nachdem dieß geschehen, nimmt man zunächst vier, und sagt: 4 ist ein Drittel von 3×4, $\frac{1}{3}$ von $1\frac{1}{2} \times 4$, 1 und $\frac{1}{2} \times 4 = 6$. Dann nehme man 6, und behandele ihr gemäß die Viertel: 6 ist $\frac{1}{4}$ mal vier mal 6; $4 \times 6 = 24$. 6 ist $\frac{2}{4}$ von 2×6; $2 \times 6 = 12$. 6 ist $\frac{3}{4}$ von $1\frac{1}{3} \times 6$; $1\frac{1}{3}$ mal 6 ist 8. Diese Uebung rathe ich hier der S. 100 in der zweiten Uebung gegebenen voran zu schicken, weil man sie leichter mit Zollstäben versinnlichen kann. Uebrigens verfahre man ganz gemäß der obigen Anleitung, und es wird durchaus nicht nothwendig seyn, bei künstlichen Versinnlichungsmitteln zu weilen.

Aber nach Beschluß der abstracten Uebungen gebe man sogleich wieder die Anwendung auf das schriftliche Rechnen, das dann abermals eintreten muß, wenn die Zahlen zu groß werden, um sie mit Sicherheit der bloßen innern Anschauung anzuvertrauen.

Durch die rein combinatorischen Uebungen ist es deutlich geworden, daß das Ganze aus den Theilen nur dadurch gefunden werden konnte, daß man die Theile selbst wiederholte, und nun denjenigen Bruch annahm, welchen die fehlenden Theile mit den vorhandenen bilden. Dieser Norm gemäß wird auch hier verfahren werden müssen, wo ja nur die Anwendung auf mehrere Zahlen zu machen ist.

Es sey also zunächst aufgegeben, welche Zahl $\frac{2}{3}$ von 97865 ausmacht?

Man räsonnirt ganz so, wie oben: $\frac{2}{3}$ ist $1\frac{1}{2}$ mal zwei Drittel. Wenn ich also $\frac{2}{3}$ habe, so fehlt mir noch ein Halb der zwei Drittel, um $\frac{3}{3}$ zu erhalten. Da nun 97865 gleich ist $\frac{3}{3}$teln, so wird das unbekannte Ganze seyn ein und ein halb mal 97865, oder die Zahl 97865, und der Quotient, welcher resultirt, wenn dieselbe Zahl mit 2 dividirt wird. Also:

$\frac{1}{2}$	9	7	8	6	5	$48932\frac{1}{2}$
	1	1	0	0	1	

$$97865 + 48932\tfrac{1}{2} = \begin{array}{r} 97865 \\ \underline{48932\frac{1}{2}} \\ 146797\frac{1}{2} \end{array}$$

Es ist demnach 97865 zwei mal der dritte Theil von $146797\frac{1}{2}$.

Die vollständige mechanische Regel, deren Grund nach solchen Vorkehrungen der Zögling allerdings mit Klarheit einsehen wird, ist folgende:

Wenn aus gegebenen Theilen ein Ganzes zu finden ist, so nehme man die gegebenen Theile und ziehe sie von dem Ganzen ab, (oder: man subtrahire den Zähler von dem Nenner.) Man nehme den daraus entstandenen Rest, und dividire mit demselben in die gegebene Summe, aus welcher das Ganze gefunden werden soll, (oder: man mache die gegebene Zahl zu dem Dividendus, und den Zähler des Bruchs zum Divisor.) Den dadurch entstandenen Quotienten addire man zur gegebenen Summe, (oder: man addire den Dividend zu dem Quotienten,) so hat man das gesuchte Ganze gefunden.

Davon noch ein Beispiel:

Es soll diejenige Zahl gesucht werden, von welcher 67235 sieben Achtel ist.

Auflösung: $\frac{8}{8}$ ist ein mal 7 und $\frac{1}{7}$ mal $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{8}$ ist gleich der Zahl 67235, folglich muß $\frac{8}{8}$ seyn $1\frac{1}{7}$ mal 67235.

$\frac{1}{7}$ mal	67	2	3	5	9605
	4	0			

Dieß Siebentel, das sind 9605, zu der obigen Zahl, ist

67235
9605
76840

folglich ist 67235 sieben Achtel von 76840.

Die Regel wird sich ohne Modification völlig bewähren, wenn die Zahl nämlich so gegeben ist, daß gerade nur ein aliquoter Theil übrig bleibt, wenn ein aliquoter Theil nur fehlt. Fehlen aber deren mehrere, und es sollte z. B. gesucht werden: von welcher Zahl die obige Sieben-Neuntel sey, so müßten noch zwei Siebentel zu derselben genommen werden.

Daher muß obige Regel hier noch folgende neue Bestimmung erhalten:

Wenn der Rest, welcher nach Abzug der obigen Theile entstand, mehr als einen aliquoten Theil beträgt, so wird ganz auf dieselbe Weise verfahren; nur muß alsdann entweder der Quotient oder der Divisor (das ist die gegebene Summe, in so fern sie durch einen aliquoten Theil dividirt wird,) eben so viel mal vermehrt werden, als es der aliquoten Theile giebt, welche zu dem Ganzen gehören; (der Quotient oder

der Divisor wird mit dem Zähler des neuen Bruchs multiplicirt;) das Product davon ist die gesuchte ganze Zahl.

Wir wählen das obige Beispiel wieder:

Es sey aufgegeben zu finden, von welcher Zahl 67235 sieben Neuntel sey?

Auflösung: $\frac{2}{9}$ ist $1\frac{2}{7} \times \frac{7}{9}$; sieben Neuntel sind gleich 67235; folglich sind $\frac{2}{9}$ ein und $\frac{2}{7}$ mal 67235:

$\frac{1}{7}$	67 4	2 0	3	5	9605

$\frac{2}{7}$ sind folglich 2×9605; 19210 zu 67235

2	19210
19210	86445

folglich ist 67235 sieben mal der neunte Theil von 86445.

Es kann aber auch verhältnißmäßig der aliquoten Theile so wenig geben, daß sie in dem Ganzen mehrere mal enthalten sind. Alsdann muß die gegebene Summe so viel mal ganz genommen, und die aliquoten Theile müssen dem Producte beigesellt werden.

Es sey aufgegeben: Von welcher Zahl ist die obige Summe $\frac{7}{33}$?

Auflösung: $\frac{33}{33}$ ist $4\frac{5}{7}$ mal $\frac{7}{33}$; $\frac{7}{33}$ ist gleich der Summe 67235, folglich sind $\frac{33}{33} = 4\frac{5}{7}$ mal so viel. (Die Summe muß also zuerst mit 4 multiplicirt, und dann mit 7 dividirt; der dadurch entstandene Quotient muß hinwiederum mit 5 multiplicirt, — denn es sind ja $\frac{5}{7}$ zu nehmen, — und dieß letzte Product zu dem obigen, welches aus der Multiplication der gegebenen Summe entstand, addirt werden.)

67235
4
268940

und

1/7	67	2	3	5
	4	0		

9605;

5/7 ist folglich 9605
5
48025. Dies zu dem Vorigen ist

268940
48025
316965

folglich ist 67235 sieben Drei- und- dreißigstel von 316965.

Dasselbe auf mehrtheilige Brüche angewendet:

Es sey aufgegeben: Von welcher Zahl ist 67235 $\frac{332}{425}$?

Auflösung: $\frac{425}{332}$ ist $1\frac{93}{332}$ mal $\frac{332}{425}$; $\frac{332}{425}$ ist gleich 67235; folglich ist $425 = 1\frac{93}{332}$ mal dieselbe Zahl; ~~332~~ = 332

7602	3	5
78	7	1
2		
1		

$202\frac{171}{332}$; $\frac{93}{332}$ muß folglich seyn 93 mal der letzte Quotient; 93 × 202 und 93 mal ~~171~~ = 171

93
513
1539
15903. Diese $\frac{15903}{332}$ sind gleich

332	1590	3
	372	9
	261	
	59	
	3	
	2	
	1	

$47\frac{299}{332}$; folglich ist das Ganze

$67235 + 18786 + 47\frac{299}{332} = 67235$

93
606
1818
18786
$47\frac{299}{332}$
$86068\frac{299}{332}$

Es ist also $67235 = \frac{332}{425}$ von $86068\frac{299}{332}$.

Zu den Uebungen, welche §. 20 vorkommen, wird man sich schicklicher des Verstandes, als der

Augen, des Zöglings bedienen. Es sind hier verschiedenartige Brüche mit einander zu vergleichen, und in ein Verhältniß zu stellen. Der Lehrer wird daher die Verhältnisse S. 108 am besten mit den einfachen Zahlen darzustellen suchen, nach welchen die Brüche genannt sind. Er setzt hier drei hin, und zeigt: drei Drittel ist ein Ganzes; ein halb mal drei sind $\frac{3}{2}$; ein halb mal drei Drittel sind also drei halbe Drittel; ein ganzes Drittel hat zwei halbe Drittel; ein Halb des Ganzen hat drei halbe Drittel; zwei halbe Drittel sind von drei halben Dritteln $\frac{2}{3}$.

Wenn dieß theilweise vor Augen gestellt werden soll, so müßte der Lehrer $2 \times 3 = 6$ hinstellen. Hier fällt in die Augen, daß ein Halb von $6 = 3$, und $\frac{1}{3} = 2$ ist; folglich verhalten sich Drittel und Halbe wie 2 und 3.

Man nimmt alsdann 2×5, und zeigt blos darauf, daß diese auch seyn fünf mal 2. Nun ist ein mal 2 ein Fünftel von 5 mal 2, und ein mal 5 ein Halb von 2×5, folglich ist $\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ des Halben.

Bei der Vergleichung zwischen Halbe und Siebentel stellt man zwei mal 7 hin, zeigt und spricht dabei, was in der Uebung selbst angegeben ist u. s. f. (vergl. S. 108 bis 110.)

Zur Versinnlichung der Uebungen S. 113 bedient man sich derselben Mittel. Zuerst setzt man 4 hin, das man in 2×2 theilt; dann ist jede Zwei durch einen Strich wiederum in 2 getheilt. Auf dieselbe Weise setzt man dann 6 aus zwei mal drei zusammen, und bemerkt, daß 1×3 ist $\frac{1}{2}$ von 2×3, und daß eins von drei $\frac{1}{3}$ macht. Da diese 3 ein Halb ist, so ist $1 = \frac{1}{3}$ des Halben, und das Ganze hat $2 \times \frac{3}{3}$, das sind sechs Drittel des Halben, aber $\frac{6}{6}$ des Ganzen.

Ich halte es hier für überflüssig, die Art der Versinnlichung weiter zu beschreiben, da sie bei allen Zahlen auf dieselbe Weise geschieht, und bemerke nur, daß sie alle darauf abzwecken, dem Zöglinge recht begreiflich zu machen, daß sich die aliquoten Theile verhalten müssen, wie die respectiven gleichen Zahlen, von denen sie entlehnt sind.

Bei den Aufgaben S. 115 unter Rubrik 2 ist vorzüglich zu verdeutlichen, was ein getheilter Bruch in Rücksicht auf das Ganze ist. Man muß den Schüler gewöhnen, mit größter Schnelligkeit gleich sich das Ganze und die Theilung desselben zu denken. So muß bei der Benennung eines Fünftel-Siebentels sogleich $\frac{7}{7}$ da stehen, und jedes dieser Siebentel in Fünftel zerlegt seyn. Sollte die Phantasie und das Abstractionsvermögen dazu nicht hinreichen, so wende sich der Lehrer wiederum zu seinen Hölzern, stelle fünf mal sieben unter einander, so wird der Schüler sieben mal 5 Einer unter einander und fünf mal 7 neben einander liegen sehen. Man zeigt nun, daß der fünfte Theil sieben, der siebente Theil aber 5 Einer enthalte, oder vielmehr, daß die Siebentel in 5, die Fünftel aber in Siebentel zerlegt sind. Man zeigt dann auf eine Eins, und bemerkt, daß diese der siebente Theil eines Fünftels, (denn 7 steht ja der Schüler neben einander liegen,) und der fünfte Theil eines Siebentels sey, (5 liegen unter einander.) Das Ganze muß nun natürlich seyn 5 mal $7 = 35$; ein Siebentel des Fünftels ist also ein Fünftel des Siebentels, und ein 35stel des Ganzen. Nun fasse man sogleich alle möglichen Beziehungen dieser Einheit, oder dieses Fünftel-Siebentels, auf, und zwar zunächst, welcher Theil es ist von $\frac{2}{7}$. Es steht vor Augen, daß $\frac{2}{7} = 2 \times 5 = \frac{10}{35}$ ist. Von diesen $\frac{10}{35}$ muß $\frac{1}{35}$ der zehente Theil seyn. Dann betrachte man dieselbe Einheit als aliquoten Theil von $\frac{1}{5}$ und ei-

nem Siebentel zusammen genommen, und da wird es sich als den zwölften Theil zeigen. (Man kann nach Gefallen sprechen lassen: $\frac{1}{35}$ ist der 35ste Theil des Ganzen, der fünfte Theil des Fünftels, der zehente Theil von zwei Fünfteln, der zwölfte Theil von $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{5}$ zusammen genommen, der vierzehente Theil von $\frac{2}{5}$. Man zeige nun weiter $\frac{3}{7}$; man wird gleich sehen, daß die Eins in Beziehung auf dieselben $\frac{1}{15}$ ist; (denn $\frac{3}{7}$ sind 3 mal $5 = \frac{15}{35}$, $\frac{1}{35} = \frac{1}{15} \times \frac{15}{35}$). Man stellt $\frac{1}{35}$ mit $\frac{2}{7} + \frac{1}{5}$ zusammen, und zeigt an den aufgestellten Hölzern nach, daß dieß davon $\frac{1}{17}$ sey. Man zeigt hierbei auf 2×5 der unter einander liegenden Einer, und dann auf die 7, die neben einander sich befinden. Darauf zeigt man auf drei Fünftel, das sind drei mal sieben, in so fern sie sich neben einander befinden, und bemerkt, daß $\frac{1}{7}$ davon sey $\frac{1}{21}$. Man fährt fort zu zeigen und zu sprechen:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{35}\tfrac{1}{35}\tfrac{1}{35}\tfrac{1}{35}\tfrac{1}{35} &= \tfrac{1}{20} \times \tfrac{4}{7} \\
&= \tfrac{1}{22} \times \tfrac{3}{7} + \tfrac{1}{5}; \\
&= \tfrac{1}{24} \times \tfrac{2}{7} + \tfrac{2}{5}; \\
&= \tfrac{1}{26} \times \tfrac{1}{7} + \tfrac{3}{5}; \\
&= \tfrac{1}{28} = \tfrac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise behandele man nur einige Zahlen, so wird es nicht fehlen, daß der Schüler auch in mehrere verwickelte Verhältnisse von selbst eindringen wird.

Man geht hierauf alle Benennungen durch, welche dieselbe Einheit in verschiedenen Beziehungen haben kann. Man nennt sie $\frac{1}{35}$, und zeigt, daß sie dieß nur von einem Ganzen, man nennt sie $\frac{1}{35}$, und zeigt, daß sie dieß nur in Beziehung auf $\frac{4}{5} + \frac{1}{7}$, man nennt sie $\frac{1}{28}$, und zeigt, daß sie dieß nur in Beziehung auf $\frac{4}{5}$ seyn könne u. s. f.

Kurz, man geht dieselben Verhältnisse hinwiederum umgekehrt durch.

Dann vergleicht man ein ganzes Fünftel mit einem ganzen Siebentel. Beide kann man den Augen vorhalten, denn man hat ja 5 mal 7 neben einander hingestellt; dies ist, von einer andern Seite angesehen, 7 mal 5. Indem man ein Siebentel suchen läßt, zeigt man auf der einen Seite herunter, wo ein mal 5 steht; und indem man das Fünftel nennt, so muß man natürlich die Richtung nach der andern Seite hin zeigen, wo fünf mal 7 stehen; denn von 5 mal 7 ist ein mal sieben ein Fünftel. Nun rechnet man 5+7 zusammen, und erhält dadurch 12; diese Zwölf auf das Ganze bezogen, sind Fünf und dreißigstel. So kann man alle mögliche Verhältnisse veranschaulichen. Der Hauptzweck ist auch hier die deutliche Anschauung der Regel, daß die Brüche sich nicht anders verhalten können, als diejenigen concreten Zahlen, nach welchen sie genannt sind; daß die Beziehungen, die in Hinsicht auf concrete Zahlen Statt finden können, alle auch Anwendbarkeit auf Brüche leiden; und endlich, daß ein jedes Ganze nur in Hinsicht auf seine Theile Bestand habe. Der Inbegriff der Theile ist vollständig da, wenn sich die verschiedenartigen Brüche in ein gemeinsames Ganze auflösen; bei Fünfteln und Siebenteln in Fünf und dreißigstel, bei Vierteln und Siebenteln in Acht und zwanzigstel u. s. f.

Ueberhaupt werden hier die Verhältnisse durch die Ansicht sehr erleichtert. Man darf nur die Vergleichung anstellen mit allen Theilen, mit welchen eine Zahl in Verhältniß gesetzt werden kann. Eine einzige Ansicht ist dann Regulativ für alle übrige. Der Deutlichkeit wegen gebe ich noch die Versinnlichung eines einzigen Beispiels. Es sey die Aufgabe S. 126 i.

Wenn der Rest eines Ganzen, welcher durch den Abzug von $\frac{5}{8} + \frac{1}{5}$ entsteht, gleich ist der Summe 80, und ich zuerst $\frac{3}{10}$, dann $\frac{1}{4}$, und zuletzt $\frac{5}{7} - \frac{1}{22}$ *) mal so viel, als diese beiden, abziehe, wie viel habe ich dann jedesmal dem Ganzen genommen, und welches war dieß Ganze?

Hier setzt man sogleich 5×8 auf, weil Achtel und Fünftel zu vergleichen sind. Jetzt zeigt man, daß $\frac{8}{8}$ ist 8×5, und $\frac{5}{5} = 5 \times 8$. Es sollen $\frac{5}{8}$ gesucht werden. Man zeigt daher $5 \times 5 = 25$. Diese 25 sind in Beziehung auf Achtel Fünftel, in Beziehung auf Fünftel sind es Achtel, das ist, sie sind Fünftel-Achtel und Achtel-Fünftel. Zu diesem allen soll noch $\frac{1}{5}$ genommen werden, das sind acht Fünftel-Achtel, diese zu 25 giebt 33. Das Ganze ist der Inbegriff aller Theile von 5 mal $8 = 40$. Davon sollen die 33 also genommen werden. Man nimmt sie, und es bleiben noch 7 übrig; diese $\frac{7}{40}$ sind der Rest. Von dem Ganzen sollen zuerst $\frac{3}{10}$ genommen werden, das sind $\frac{3}{10}$ mal $\frac{40}{40} = 3 \times 4 = \frac{12}{40}$. Dann $\frac{1}{4}$, das ist $\frac{1}{4}$ $40 = \frac{10}{40}$. Zuletzt noch $\frac{5}{7}$ weniger $\frac{1}{22}$ oder fünf Siebentel derjenigen Zahl, welche bleibt, wenn man von $\frac{22}{40}$ ein 22stel genommen hat. $\frac{1}{22}$ von beiden, nämlich von $\frac{3}{10}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen genommen, das sind also $\frac{12+10}{40}$ (alles zeigt man nach) $= \frac{22}{40}$. Man nimmt hier das Zwei und zwanzigstel von den $\frac{22}{40}$, und sieht gleich, daß dieß $\frac{1}{40}$ sey. Nach diesem Abzuge bleiben noch $\frac{21}{40}$ übrig. Diese wären also noch $\frac{5}{7}$ mal zu nehmen. Ein Siebentel mal $\frac{21}{40}$ ist so viel 40stel, als überhaupt $\frac{5}{7}$ mal 21 ist. $5 \times 3 = \frac{15}{40}$. Auf diese Weise sind alle Verhältnisse nachgewiesen. Man hat also zuerst $\frac{12}{40}$;

*) Dieser Zusatz ist durch ein Versehen oben weggelassen worden. Das Beispiel hatte überhaupt den Zweck, zu zeigen, daß durch Brüche blos Verhältnisse angedeutet seyen, die überall in derselben Beziehung mit einander stehen, als die concreten Zahlen.

dann $\frac{12}{40}$; dann $\frac{15}{40}$; und zuletzt das Ganze. So viel mal als jedes den Rest, das sind $\frac{7}{40}$, enthält, so viel mal muß natürlich 80 genommen werden.

So viel nur zur Probe, daß sich die Verhältnisse alle auf eine höchst simple Weise durch diese Veranschaulichung darstellen.

Zu den S. 134 f. gegebenen Uebungen wird man am besten allezeit so viel mal getheilte ganze Hölzer aufstellen, als die Aufgabe fordert. Bei der ersten Uebung mit Halben stelle man Zweier, bei der nächstfolgenden Dreier auf. Doch wird diese Uebung kaum noch der Versinnlichung bedürfen. Die S. 137 f. gegebenen Aufgaben zeigen, daß man auch hier immer nur die Anwendung der Verhältnisse von concreten Zahlen findet. Nehme man z. B. die Aufgabe: c $\frac{3}{4}$ von 3×4, wie viel Theile von 5 mal 4? Man stelle hier $5 \times 4 = 20$ auf, aber so, daß fünf Vierer neben einander liegen. Nun sehe man auf 3×4. Von diesen 3×4 sollen, der Aufgabe gemäß, $\frac{3}{4}$ genommen werden. Hier verfährt man eben so, als wenn man $\frac{3}{4}$ von 3 zu suchen hätte; $\frac{3}{4} \times 3$ sind aber $3 \times 3 = \frac{9}{4}$. Man sieht, daß diese neun Viertel von 3 mal 4 seyn $\frac{9}{4/5}$ von 5×4; $\frac{9}{4/5}$ ist aber $\frac{9}{20}$. Auch kann man das so zeigen: 3 mal $4 = 12$; $\frac{3}{4}$ von 3×4 ist also $\frac{3}{4} \times 12 = 9$; $5 \times 4 = 20$; die 9 auf 20 bezogen ist $\frac{9}{20}$.

Ganz auf dieselben Anschauungen stützen sich die Uebungen S. 142 und die Aufgaben S. 143, so, daß ich es für unnöthig halten würde, länger hierbei zu verweilen.

Hier ist wiederum die Anwendung der bisherigen Uebungen auf die schriftliche Rechnung zu machen. Zuerst ist zu zeigen, auf welche Weise man die verschiedenartigen Brüche in ein gemeinsames Ganze auflöset; oder, wie man sich technisch

ausdrückt, wie man Brüche unter einerlei Nenner bringt. Dieß geschieht natürlich auf dieselbe Weise, wie oben. Man fand das respective Ganze, indem man die verschiedenen Brüche mit einander selbst multiplicirte. Man sahe, daß allezeit die Theile im umgekehrten Verhältnisse wachsen und abnehmen, als die concreten Zahlen. So ist $\frac{1}{7}$ von einem Fünftel $\frac{1}{5}$, und $\frac{1}{5} = \frac{7}{5}$ mal $\frac{1}{7}$. Man wird bemerken, daß der Nenner des mehrtheiligen (kleinern) Bruchs zum Zähler des andern wird. An diese Regel muß man sich halten, wenn man weiterhin in das schriftliche Rechnen kommt. Wenn daher $\frac{1}{33}$ mit $\frac{1}{33}$ zu vergleichen ist, so wird der Nenner des ersten Bruches zum Nenner des zweiten, und der Nenner des zweiten Bruches zum Zähler desselben, und es steht das Verhältniß $\frac{33}{35}$ da. Siebentel und Fünftel verhalten sich wie 5 und 7; und 35stel und 33stel verhalten sich wie 33 und 35. Bei Fünfteln und Siebenteln mußte daher der Nenner des mehrtheiligen (kleinern) Bruches, das ist Siebentel, zum Nenner des wenigertheiligen (größern) Bruches, der Fünftel, und die Zahl, welche den Nenner des größern Bruchs ausdrückt, mußte zum Zähler genommen werden. So haben wir abermals eine sehr einflußreiche Regel aus unsern Uebungen gelernt, die bei unserm Zöglinge um so mächtiger wirken muß, je deutlicher dieser ihren Grund einsehen wird.

Setze man also, man wolle das Verhältniß folgender Brüche wissen: $\frac{1}{176}$, wie viel mal $\frac{1}{83}$? so wird man dieser Regel gemäß gleich schreiben $\frac{83}{176}$. Wäre die Frage: wie viel mal $\frac{1}{176}$ in $\frac{1}{83}$ enthalten sey, so hätte man nur 83 in 176 zu dividiren. Also:

83 | 176, | $2\frac{10}{83}$; folglich $\frac{1}{83} = 2\frac{10}{83}$ mal $\frac{1}{176}$.
10 |

Die mechanische Regel bestimmt und vollständig ist folgende:

Wenn ein kleinerer Bruch in einen größern umgesetzt werden soll, so mache man den Nenner des mehrtheiligen (kleinern) Bruchs zum Nenner des größern, und den Nenner des wenigertheiligen, also größern Bruchs zum Zähler desselben. Wenn aber der größere Bruch mit dem kleinern verglichen, oder in denselben umgesetzt werden soll, so mache man den Nenner des mehrtheiligen (kleinern) Bruches zum Zähler des wenigertheiligen oder größern.

Zum Beispiel: $\frac{1}{7}$ mit einem Drittel verglichen ist $\frac{3}{7}$; hingegen $\frac{1}{3}$ mit $\frac{1}{7}$ zusammengehalten ist $\frac{7}{3}$. Man sieht, daß nur die Nenner mit den Zählern vertauscht werden. Wenn $\frac{1}{3}$ mit $\frac{1}{7}$ vertauscht wird, so läßt man den Nenner des ersten Bruches stehen, und schreibt ihm nur den Nenner des letztern zum Zähler über, und so umgekehrt.

Es kann auf diese Weise nicht die geringsten Schwierigkeiten machen, die größten Brüche mit einander zu vergleichen oder in einander umzusetzen.

Sollen aber die Brüche aufgelöset werden; so halte man sich ganz an die obige Anleitung, und wende dieselbe nur auf größere Zahlen an. Wenn dort schon bemerkt ist, daß der Nenner eines Bruchs allezeit den Zähler des andern gebe, so gilt das auch hier in seinem ganzen Umfange; nur darf nicht übersehen werden, daß jeder aliquote Theil noch auf sein Ganzes bezogen werden könne. $\frac{1}{7}$ ist $\frac{3}{7}$ eines Drittels. Das setzt voraus, daß jedes Drittel des Ganzen in Siebentel zerlegt sey, mithin das Ganze selbst 3 mal $7 = \frac{21}{3}$, oder $\frac{21}{21}$, haben müsse. Man beobachte nur genau den Weg, auf welchem man zu diesem Resultate gelangte;

denn darauf allein stützt sich das Bewußtseyn der Richtigkeit und Wahrheit, daß man sich an die Norm hält, die sich durch Uebungen mit kleinern Zahlen in uns abgedrückt hat. Hier klingen die Regeln mechanisch, weil man sich der verkürzenden Ausdrücke bedient. Man hüte sich aber, damit den Zögling zu übereilen. Nur wenn er die Uebung vollbracht, und das Ganze, gemäß dem Obigen, gelöset hat, dann lasse man ihn noch einmal den Weg machen, und bringe ihn noch zum deutlichern Bewußtseyn dessen, was er that. Dadurch wird ihm zugleich die Nothwendigkeit einer kürzern Bezeichnung einleuchten.

Ich würde selbst weniger zu den mechanischen Regeln und technischen Bestimmungen flüchten, wenn mir es nicht Absicht wäre, mich auch denen möglichst leicht verständlich zu machen, die daran gewöhnt sind.

Betrachtet man nun noch einmal das obige Verfahren, so findet man, daß man den Nenner des einen Bruches zum Zähler des andern machte. Dann nahm man den Nenner des neuen Bruches nur als Bestandtheil des vorherigen. Zum Beispiel: $\frac{1}{176}$ ist $\frac{83}{176}$ eines 83stels, oder $\frac{\frac{83}{176}}{83}$. Nun denke man sich einen jeden Theil so viel mal getheilt, als der Nenner des neuen Bruchs besagt, oder man multiplicire den Zähler mit dem Nenner, so hat man das Ganze, oder denjenigen Bruch, in welchen sich die ungleichartigen Theile auflösen, gefunden. $\frac{83}{\frac{83}{176}}$ sind $176 = \frac{83}{14608}$. Gesetzt aber, es

$$\begin{array}{r} 83 \\ \hline 528 \\ 1408 \\ \hline 14608 \end{array}$$

sollen beide Brüche $\frac{1}{83}$ und $\frac{1}{176}$ addirt werden, so sieht man von selbst ein, daß $\frac{1}{83}$ sey $\frac{\frac{176}{83}}{176}$ und $\frac{1}{176} = \frac{\frac{83}{176}}{83}$, oder $176 + 83 = \frac{259}{14608}$.

Sind mehrere aliquote Theile durch einander zu vermehren, z. B. $\frac{2}{3} \times \frac{7}{8}$, so halte man sich ganz an die S. 133 gegebene Regel. Man multiplicire nämlich die Zähler, so bekommt man die Zähler desjenigen Bruches, in welchen sich die beiden ungleichartigen Theile auflösen; dann multiplicirt man auch die beiden Nenner der verschiedenartigen Brüche, wodurch man das Ganze empfängt. So ist z. B. $\frac{4}{7}$ mal $\frac{2}{3}$ gleich $4 \times 2 = \frac{8}{21}$, oder $\frac{8}{21}$. Die Einundzwanzigstel findet man, indem man die Nenner, also hier 7×3, multiplicirt. Nicht anders wird es bei größern Zahlen seyn. Wenn $\frac{8}{176} \times \frac{9}{83}$ zu nehmen sind, so wird man $8 \times 9 = \frac{72}{176}{}_{83}$, und wenn $\frac{8}{83} \times \frac{9}{176}$ gefunden werden sollen, so wird man $8 \times 9 = \frac{72}{83}{}_{176}$ erhalten; auf das Ganze bezogen ist es in beiden Fällen $\frac{72}{14608}$. Nehme man die Summe größer, z. B. $\frac{72}{176} \times \frac{81}{83}$, so muß man zuerst 72 mit 81 multipliciren. Also:

$$\begin{array}{r} 81 \\ 72 \\ \hline 162 \\ 567 \\ \hline 5832 \end{array}$$

Das Product ist der Nenner. Soll dieser auf das Ganze bezogen werden, (wenn die Frage wäre: $\frac{72}{176} \times \frac{81}{83}$, wie viel Theile des Ganzen?) so muß man die beiden Nenner ebenfalls mit einander multipliciren; also: $176 \times 83 = 14608$. Die Multiplication der Nenner durch Nenner giebt wieder Nenner, und die der Zähler durch Zähler nichts anders als Zähler; folglich sind $\frac{72}{176} \times \frac{81}{83} = \frac{5832}{14608}$.

So sind wir alle Veränderungen und alle möglichen Verhältnisse durch, welche sich mit Brüchen vornehmen lassen. Wir wollen noch ein Beispiel auf gleiche Weise durchführen.

$\frac{1}{879}$ verglichen mit $\frac{1}{352}$.

1) Die Theile werden auf sich selbst bezogen.

a) $\frac{1}{879}$, wie viel Theile eines 352stels?

Antw. $\frac{352}{879}$. Denn $352 \times 879 = 879 \times 352$; folglich ist $\frac{1}{879} \times 352$stel gleich $\frac{352}{879}$ eines 352stels.

b) $\frac{1}{352}$, wie viel mal $\frac{1}{879}$?

Antw. $\frac{879}{352}$. Denn $879 \times 352 = 352 \times 879$; 1×352 ist folglich $\frac{879}{352}$ von 879×352.

Soll gefunden werden, wie viel mal $\frac{1}{879}$ in $\frac{1}{352}$ enthalten sey, so macht man den Nenner des kleinern oder mehrtheiligen Bruches zum Dividend, und den Nenner des grössern oder wenigertheiligen zum Divisor, wie schon oben gezeigt wurde. Der Quotient giebt dann die Zahl, wie viel mal der eine in dem andern enthalten sey. Also:

352	879	$2\frac{175}{352}$.
	275	
	1	

Es ist also ein 879stel in einem 352stel $2\frac{175}{352}$ mal enthalten.

c) Es können auch mehrere verschiedenartige Theile des Ganzen mit sich selbst verglichen und in einander umgesetzt werden. Es kann z. B. die Frage seyn: wie viel mal ist $\frac{1}{352}$ in $\frac{8}{879}$?

Auflös. $\frac{1}{879} \times \frac{1}{352} = \frac{352}{879}$; folglich sind $\frac{8}{879} = 8 \times 352 = \frac{2816}{879}$. Das macht hinwie-

8

2816

derum mehr als ein Ganzes, und ich muß natürlich, wenn ich dieß finden will, erst die kleinste Zahl, das ist hier den Nenner 879, in den Zähler 2816 dividiren, um dieses zu finden:

) 386 (

879	2816	$3\frac{172}{879}$.
	409	
	27	
	1	

Es ist also $\frac{1}{352}$ in $\frac{8}{879}$ enthalten $3\frac{179}{879}$ mal.

Ein anderes Beispiel:

$\frac{187}{879}$, wie viel sind es Theile von $\frac{217}{352}$?

Auflös. Da $\frac{1}{879} = \frac{352}{309408}$, so muß $\frac{187}{879}$ seyn

$187 \times 352 = 352$
187
2464
2816
352
65824; also $\frac{65824}{879}$ eines 352stels.

Nun ist aber $\frac{1}{352} = \frac{879}{309408}$; folglich sind $\frac{217}{352}$ gleich

$217 \times 879 = 879$
217
6153
879
1758
190743. Das letzte ist erst der Nenner, das Obige der Zähler. Es sind also $\frac{187}{879}$ von $\frac{217}{352} = \frac{65824}{190743}$.

Wäre die Frage, wie viel mal $\frac{187}{879}$ in $\frac{217}{352}$ enthalten seyen, so würde man eben so verfahren, nur daß man den aliquoten kleinern Theil, das ist 65824, oder den Zähler, in den aliquoten größern, 190743, oder den Nenner, herein dividiren müßte.

Also:	65824	190743	$2\frac{59095}{65824}$
		70195	
		690	
		5	

Es ist demnach $\frac{217}{352} = 2\frac{59095}{65824}$ mal $\frac{187}{879}$.

Die mechanische Regel ist hier folgende:

Wenn zwei verschiedenartige Brüche, deren Zähler eine Mehrzahl ist, in einander umgesetzt werden sollen, so multiplicirt man mit dem Zähler des einen Bruchs den Nenner des andern, dann hat man die neuen Verhältnißzahlen oder den neuen Bruch gefunden. Will man sehen, wie viel mal der kleinere in dem größern enthalten sey, so dividirt man die kleinere Zahl, oder den Zähler, in die größere, oder den Nenner.

2) Die Theile werden addirt und auf ihr respectives Ganze bezogen:

a) $\frac{1}{879} + \frac{1}{352}$, wie viel sind es Theile des Ganzen?

Auflösung: $\frac{352 + 879}{352}$. Denn $\frac{1}{879} = \frac{352}{879 \cdot 352}$; $\frac{1}{352} = \frac{879}{352 \cdot 879}$; $352 + 879 = 879$, das ist $\frac{352 \cdot 879}{352}$;

352
1231

$\frac{1}{879 \cdot 352}$ ist $\frac{1}{879} \times \frac{352}{352}$; also: 879
352
1758
4395
2637
309408; folglich $\frac{309408}{309408}$.

Es ist also $\frac{1}{879} + \frac{1}{352} = \frac{123111}{309408}$.

b) Will man mehrere solche aliquote Theile nehmen, so ändert dieses gar nichts weiter, als daß man natürlich einen jeden der Theile, der Aufgabe gemäß, vermehrt. Gesetzt also, es sollen $\frac{136}{879} + \frac{253}{352}$ genommen werden, so leuchtet von selbst ein, daß man erst sehen muß, wie viel ein

jeder einzelne Bruch beträgt. Also: $\frac{1}{879}$ ist $\frac{352}{879}$, folglich müssen $\frac{136}{879}$ seyn 136 mal $\frac{352}{879}$; also: 352

136

2112
1056
352

47872

das sind $\frac{47872}{879}$, oder $\frac{47872}{309408}$. Jetzt müssen noch $\frac{253}{352}$ genommen werden. Da $\frac{1}{352}$ ist $\frac{1}{879}$, so müssen $\frac{253}{352}$ auch $253 \times \frac{879}{352}$ seyn, oder 879 muß durch 253 multiplicirt werden:

879
253

2637
4395
1758

222387

Beide Brüche zusammen sind:

222387
47872

270259, d. s. also $\frac{270259}{309408}$.

Fassen wir das, was wir so eben thaten, unter eine bestimmte Regel zusammen, so würde diese seyn:

Wenn die Zähler zweier ungleichartigen Brüche zusammengesetzt sind, und die Brüche selbst addirt werden sollen, so multiplicirt man mit dem Zähler des einen Bruchs gleich den Nenner des andern, und empfängt dadurch denjenigen Zähler zu dem gemeinschaftlichen Nenner der verschiedenartigen Brüche.

c) Es ändert sich die Operation nicht im mindesten, wenn man beide ungleichartige Theile dem noch unbekannten, also nur imaginären, Ganzen entzieht. Wenn hier $\frac{136}{879} + \frac{253}{352}$ dem Ganzen genommen werden sollten, so würde man auch hier so verfahren, wie oben. Nur zuletzt wäre der Zähler noch von dem Nenner, also 270259 von 309408, abzuziehen, um die Differenz, oder den Rest, zu finden:

$$\begin{array}{r} 309408 \\ 270259 \\ \hline 39149 \end{array}$$

Diese 39149 sind natürlich 309408 Theile des Ganzen; folglich bleibt nach Abzug der $\frac{136}{879} + \frac{253}{352}$ noch $\frac{39149}{309408}$.

Wollte man wissen, wie viel mal dieser Rest in einem jeden der gegebenen Theile, und wie viel mal er in dem Ganzen enthalten sey, so brauchte man nur mit ihm in diese Theile hinein zu dividiren.

Die ersten aliquoten Theile waren $\frac{47872}{309408}$; der Rest ist $\frac{39149}{309408}$. Der Rest ist der Divisor, die aliquoten Theile sind der Dividend. Also:

39149	47872	$1\frac{8723}{39149}$
	8733	
	2	

Die zweiten aliquoten Theile aufgelöset betrugen $\frac{222387}{309408}$. In diese muß der Rest ebenfalls dividirt werden:

39149	222387	$5\frac{26642}{39149}$
	77342	
	266	

In den $\frac{253}{352}$ ist demnach derselbe Rest $5\frac{266}{391}\frac{42}{49}$ mal enthalten.

Wäre nun noch die Frage: wie viel mal derselbe Rest in dem Ganzen enthalten sey, so müßte er auch darein dividirt werden. Das Ganze ist $\frac{309408}{309408}$, der Rest ist $\frac{39149}{309408}$; also:

39149	309408	$7\frac{35365}{39149}$
	96725	
	3546	
	3	

folglich ist derjenige Rest, welcher nach Abzug der $\frac{136}{879} + \frac{253}{352}$ entsteht, in dem Ganzen $7\frac{35365}{39149}$ mal enthalten.

3) Die Theile werden multiplicirt, und auf ihr respectives Ganze bezogen:

a) $\frac{1}{879}$ mal $\frac{1}{352}$, wie viel sind es Theile des Ganzen?

Man sieht, daß hier nicht $\frac{1}{352}$ ein Ganzes, sondern nur ein 879stel mal genommen werden soll. Das muß natürlich seyn der 879ste Theil eines 352stels. Um diesen zu finden, muß ich mir jedes 352stel in 879 Theile zerlegt denken. Dadurch erhalte ich natürlich 352 mal 879 Theile. Ich muß daher die 879 mit 352 multipliciren:

879
352
1758
4395
2637
309408

Es ist daher $\frac{1}{879}$ mal $\frac{1}{352}$ gleich $\frac{1}{309408}$.

b) Es soll aber $\frac{136}{879}$ mal $\frac{253}{352}$ genommen werden?

Es leuchtet ein, daß zuerst von der Einheit ausgegangen werden muß. Also: $\frac{1}{879} \times \frac{1}{352} = \frac{1}{309408}$. Ein 879stel mal $\frac{253}{352}$stel muß also ein mal $\frac{253}{309408}$, und $\frac{136}{879}$ muß folglich $136 \times \frac{253}{309408}$ seyn.

Also: 253
136
1518
759
253
34408

Es ist also $\frac{136}{879}$ mal $\frac{253}{352} = \frac{34408}{309408}$.

Endlich ist es uns auch frei gestellt, alle die hier gegebenen reinen Verhältnisse auf die Proportionalrechnung anzuwenden. Es ist hier nicht anders zu verfahren, als bei kleinern Zahlen; nichts weiter aufzusuchen, als die Verhältnißzahl.

Es mag die Aufgabe gegeben seyn: $\frac{1}{352}$ verhält sich zu $\frac{1}{879}$, wie sich die Zahl 732493 zu einer unbekannten verhält.

Es muß aus den S. 125 angegebenen Beispielen klar seyn, daß die unbekannte Zahl eben so viel aliquote mal genommen werden müsse, als die letzte Proportionalzahl des ersten Gliedes die erste enthält. So viel mal also ein 879stel ein 352stel enthält, so viel mal muß auch die Zahl 732493 genommen werden. Nun ist aber $\frac{1}{879} \times \frac{1}{352}$ nach dem Obigen $= \frac{352}{879}$, folglich müssen auch von der gegebenen Zahl $\frac{352}{879}$ genommen werden. Oder: die Zahl muß mit 879 dividirt, (dadurch erhält man $\frac{1}{879}$,) und der Quotient durch 352 multiplicirt werden, (dadurch erhält man $\frac{352}{879}$.) Da es einerlei ist, ob der Quotient, oder sogleich der Divisor, vermehrt wird, so wollen wir uns hier dieses Vortheils der schriftlichen Rechnung bedienen:

732493
352
1464986
3662465
2197479
257837536

Dieß ist der Dividend, wenn gleich die Vermehrung des Quotienten mit eingebracht ist. Der Divisor ist 879:

879	257878	3	7	5	3	6	$293330\frac{466}{879}$
	930	2	0	8	6		
	827	1	9	7			
	709	9	6	4			
	35	5	7				
	23	7					
	7						

Der Quotient muß die letzte Proportionalzahl seyn. Das ganze Verhältniß ist folglich:

$$\frac{1}{352} : \frac{1}{879} = 732493 : 293330\frac{466}{879}.$$

Dasselbe Beispiel umgekehrt:

$$\frac{1}{879} : \frac{1}{352} = 732493.$$

$\frac{1}{352}$ ist (nach dem Obigen) $2\frac{175}{352} \times \frac{1}{879}$; $\frac{1}{879} = 732493$, folglich muß $\frac{1}{352}$ seyn $2\frac{175}{352}$ mal dieselbe Zahl, [oder: die Zahl muß mit zwei multiplicirt, dann mit 352 dividirt, und der Quotient (oder vorher der Dividend) mit 175 multiplicirt,] und dieß Product dem vorigen beigesellt werden:

732493
2
1464986

(Gleich den Dividend multiplicirt;)

732493
175
3662465
5127451
732493
128186275

Diese Zahl mit 352 dividirt:

352	12811	8	6	2	7	5	$364165\frac{195}{352}$
	335	6	8	0	5		
	~~425~~	5	3	9	0		
	44	~~4~~	5	4	9		
	~~44~~		2	2			
			~~2~~	1			

Dieser Quotient enthält also die $\frac{175}{352}$; er muß nun dem obigen Product, oder der schon zweifach genommenen Zahl beigesellt werden. Also;

1464986
364165 $\frac{195}{352}$
1829151

Die letzte Summe ist die gesuchte unbekannte Proportionalzahl. Das ganze Verhältniß ist:

$\frac{1}{879} : \frac{1}{352} = 732493 : 1829151\frac{125}{352}$.

Eben so kann auch zu einem andern oben durchgeführten Verhältnisse eine Proportionalzahl gesetzt, und nach derselben Regel behandelt werden.

Wir wollen als Beispiel das letzte Verhältniß durchführen, und uns die Aufgabe geben: Derjenige Rest, welcher entsteht, wenn man $\frac{136}{879} + \frac{253}{352}$ von dem Ganzen abzieht, sey gleich der Summe 732493, wie viel betragen die hier gegebenen Theile, und wie viel das Ganze?

Man sieht, daß hier drei verschiedene Verhältnisse vorkommen, nämlich das des Restes zu dem ersten, dann zum zweiten der Theile, und zuletzt zum Ganzen.

Man schickt hier allen andern ganz die obige Auflösung voran, und nachdem man den Rest 39149 gefunden, so setzt man ihn als erste Proportionalzahl. So viel mal als der erste Bruch, nämlich $\frac{43872}{309408}$, den Rest enthält, so viel mal muß natürlich die gegebene concrete Zahl genommen werden, um den ersten aliquoten Theil des imaginären Ganzen zu empfangen.

Da der Rest in $\frac{136}{8779}$ enthalten ist $1\frac{8723}{39149}$ mal, so muß die gegebene Zahl auch so viel mal genommen werden. Um die zu suchenden Theile zu finden, suche man erst einen Theil, den man findet, wenn man den Rest in die gegebene Zahl dividirt, und dann so viel mal vermehrt, als der Bruch besagt. Man dividirt mit dem Nenner in die dritte Proportionalzahl, und multiplicirt dann den Quotienten:

39149	∦32493	$18\frac{27811}{39149}$
	441001	
	30928	
	∦2881	
	7	

Der Quotient 8723 mal genommen, das ist $8723 \times 18 + \frac{27811}{39149}$:

8723	und	27811
18		8723
69784		83433
8723		54622
157014		194677
		222488
		242585353

Die erste Summe enthält die Ganzen, die letzte die Theile, die aber auch wieder mehrere Ganze ausmachen. Will man diese finden, so muß man auch sie wiederum durch den Rest dividiren, und den dadurch erhaltenen Quotienten dem schon vorhandenen Ganzen, das ist hier der ersten Summe, zugesellen:

39149	242585	3	5	3	$6196\frac{1}{3}\frac{8}{9}\frac{2}{1}\frac{4}{4}\frac{8}{9}$
	89941	5	4	9	
	7797	9	0		
	4686	1	4		
	3777				
	7063	5			
	759	3			
	78	2			
	1				

157014
6196
163210 $\frac{1}{3}\frac{8}{9}\frac{2}{1}\frac{4}{4}\frac{3}{9}$

So viel machen also $\frac{8723}{39149}$ aus. Diese Summe muß nun zu der gegebenen Zahl addirt werden; (denn sie sollte ja ein und die eben genannten Theile mal genommen werden:)

73493
163210
895703 $\frac{8723}{39149}$

Die zweite Anzahl der aliquoten Theile enthielt den Rest $5\frac{2}{3}\frac{6}{9}\frac{6}{1}\frac{4}{4}\frac{2}{9}$ mal. So viel mal muß demnach die gegebene Zahl genommen werden:

732493
5
3662465

Da ein 39149stel ist $18\frac{27811}{39149}$, so sind $\frac{26642}{39149}$ gleich

26642	und	27811
18		26642
213136		44622
26642		111244
479556		166866
		166866
		44622

39149 | 63092 | 96 | 62 | 16116 $\frac{4378}{39149}$
34953 | 57 | 78
23949 | 13 | 3
5584 | 02 | 7
453 | 96
164 | 54
3 | 43
23
5

Der ganze aliquote Theil beträgt also:

3662465
479556
16116
4159137 $\frac{4378}{39149}$

Das Ganze enthält den Rest $7\frac{35365}{39149}$, folglich 7×732493 und $\frac{35365}{39149} \times$ die Summe.

7
5125451

Da ein 39149stel nach dem Obigen $= 18\frac{27811}{39149}$, so sind es

35365 × 18 und

18	27811
282940	35365
35365	35365
636590	282920
	247555
	70730

39149 | 98353 | 6 | 0 | 1 | 5 | 25122 $\frac{34837}{39149}$
30175 | 1 | 1 | 3 | 7
20055 | 7 | 3 | 5
5501 | 6 | 1 | 3
480 | 4 | 9
199 | 3 | 8
81 | 5
25 | 4
3

Das Ganze ist also:

5125451
636590
25122
5787163 $\frac{34837}{39149}$

Auf diese Weise ist die Aufgabe gelöset, und wir haben nun folgende Verhältnisse: Wenn der Rest, welcher entsteht, wenn man $\frac{136}{879} + \frac{253}{352}$ von dem Ganzen abzieht, gleich ist der Zahl 732493, so sind $\frac{136}{879} = 895703\frac{8723}{39149}$; $\frac{253}{352} = 4159137\frac{4378}{39149}$, und das Ganze $= 5787163\frac{34837}{39149}$.

Die Regel zusammengefaßt ist also:

Man subtrahire die gegebenen Theile von dem daraus von selbst sich erzeugenden Ganzen, nehme alsdann den Rest und dividire ihn in eine jede Anzahl der gegebenen Theile, und dann in das Ganze. Mit dem jedesmal gefundenen Quotienten multiplicire man die gegebene dritte Proportionalzahl, so ist das jedesmalige Product die gesuchte vierte Proportionalzahl.

Ich glaube hierdurch der leitenden Beispiele genug gegeben zu haben, um der letzten Uebung zueilen zu können, bei der wir nicht Ursache haben werden, so lange zu weilen, da uns die Gesetze und die Form ihrer Darstellung bekannt sind. Die §. 22 und 23 vorkommenden Uebungen übergehe ich, weil sich über die Methodik nur wenig mehr sagen läßt, als bisher schon bemerkt wurde, und oben selbst angedeutet ist. Die Vortheile, welcher man sich bei den veranschaulichten Kopfrechnungen bedienen kann, leiden auch auf die schriftliche Rechnung ihre Anwendbarkeit, und werden daher den Regeln der schriftlichen Rechnung überhaupt gemäß von einem jedem Lehrer selbst behandelt werden, der sich in das bisher Erörterte einstudirt hat.

Die letzten der hier gegebenen Uebungen sind nichts weiter, als Verkürzungsmittel bei verwickelten Proportionalrechnungen, und enthalten besonders alle Aufgaben, welche die sogenannte Kettenregel sonst lösen lehrt. Man dringe in die Behandlung der kleinern Zahlen und kleinern Brüche ein; so wird man sich mit größern wohl bald helfen können.

Der Veranschaulichung, in so fern sie Sache der Augen seyn soll, bedarf es hier nicht weiter, da nun die innere Anschauung genugsam gereift seyn muß, und wird, um sich die Verhältnisse vorzustellen. Man schreite daher hier schnell zu den Uebungen fort, indem man gleich damit beginnt, daß bei der Brechung einer Zahl vorzüglich die concrete Zahl in Betrachtung kommt, von welcher ein aliquoter Theil genommen wird. Wenn z. B. $\frac{1}{7}$ ein Siebentel genommen werden soll, so kümmert man sich nicht um den Theil, der da benannt ist, sondern man fragt: wie viel sind Theile vorhanden, und nimmt dann den aliquoten Theil von derjenigen Zahl, welche anzeigt, wie viel der Theile vorhanden sind, also hier von der Sieben, d. i. 1. Wenn von 7 Dritteln ein Drittel genommen wird, so müssen natürlich nur 6 Drittel übrig bleiben, und wenn ihnen noch ein Siebentel verliehen wird, so werden es $\frac{7}{7}$. Die Regel, daß eine Proportionalzahl in gleichem Verhältnisse bleibt, wenn sich die zweite Zahl in gleichem qualitativen Verhältnisse vermindert, als die erste vermehrt werden soll, läßt sich auf folgende Weise sinnlich darstellen:

Man setze 3 hin und 12; man frage: wie viel mal diese in der 12 enthalten sey. Man fordere dann, daß diese Drei um $\frac{1}{3}$ ihrer selbst vermehrt werde, so wird man ein Drittel mehr als 3, d. i. 4, erhalten, und dieses wird in dem Ganzen enthalten seyn nicht mehr vier mal, sondern ein Viertel mal weniger. Also sieht man hier gleich, daß der Exponent um ein Viertel verliert, wenn die erste Proportionalzahl $\frac{1}{3}$ gewinnt. Man wende dieß nun weiter an, indem man, anstatt die erste Verhältnißzahl ein Drittel zu vermehren, gleich der zweiten Proportionalzahl $\frac{1}{4}$ entzieht. Man nimmt, anstatt drei um ein Drittel zu vermehren, der 12 ein Vier-

tel weg, dadurch bekommt man neun, und darin ist die Drei eben so viel mal enthalten, als die Vier in zwölf.

Man kann dasselbe noch an einigen Verhältnißzahlen versuchen. Gewöhnlich machen diese Uebungen dem Schüler viel Freude, und versüßen die vorhergegangene Arbeit, weil die Verhältnisse versteckt sind, und aus dem Verborgenen gleichsam hervorgezogen werden müssen.

Eben so kann man auch die obige Drei um zwei Drittel vermehren lassen; dadurch hat man 5 Drittel erhalten. Sollten davon zwei Drittel genommen werden, so würden diese in Beziehung auf 5 Drittel Fünftel seyn; man wird, anstatt drei, 5 erhalten; diese ist in 12 $2\frac{2}{5}$ mal enthalten. Man sieht also, daß man da gleich $\frac{2}{5}$ weniger hat als vier, oder $\frac{2}{5}$ weniger als diejenige Zahl, welche anzeigt, wie viel mal die Drei in der 12 enthalten sey, und daß man auf diese Weise nur gleich $\frac{2}{5}$ dieser Zahl weniger nehmen konnte. Dasselbe versuche man mit der Zwölf. Anstatt $\frac{2}{3}$ zu drei noch hinzu zu thun, nehme man vielmehr der 12 noch $\frac{2}{5}$, so wird die übrig gebliebene Zahl ebenfalls die Drei $2\frac{2}{5}$ mal enthalten. $\frac{2}{5}$ mal 12 sind $4\frac{4}{5}$; diese von 12, bleiben noch $7\frac{1}{5}$; diese sind $2\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ mal drei; $\frac{1}{5}$ ist $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{3}$ hat $\frac{5}{15}$; $\frac{5+1}{15} = \frac{6}{15}$; $\frac{6}{15}$ sind $\frac{2}{5}$. Man sieht also auch hier, wenn auch nicht mit den Augen, so doch augenscheinlich, daß auf eine jede Weise das Verhältniß bleibt.

Wenn zu irgend einer als Ganzen gesetzten Zahl zwei aliquote Theile zugesetzt werden, so vermindert sich die Benennung um eben so viel, als aliquote Theile dazu kommen. Wenn ich zu einem Ganzen noch ein Fünftel gesellt, so habe ich $\frac{6}{5}$; will ich den sechs Fünfteln den Werth eines solchen Theils, als ich gab, entziehen, so darf ich

von

von diesen $\frac{5}{7}$ nicht mehr $\frac{1}{5}$, sondern ich muß $\frac{1}{6}$ nehmen. Wenn ich dem Ganzen $\frac{2}{5}$ zugesellе, so wachsen die $\frac{5}{5}$ zu $\frac{7}{5}$; will ich nun denselben den Werth eines Fünftels nehmen, so muß ich $\frac{1}{7}$ fordern, wenn $\frac{3}{5}$ dazu kommen, $\frac{1}{8}$. Das alles kann man an der Rechenmaschine nachweisen. Man stelle nur 5 auf, und fordere, daß nach Hinzusetzung eines neuen Theils allemal eine Eins wieder genommen werde, und frage dann: was diese Eins für ein aliquoter Theil sey?

Auch dieses muß hier auf schriftliche Rechnung angewendet werden. Es bleiben hier, wie überall, dieselben Regeln; nur die Art der Darstellung muß etwas verwickelter werden, wenn die Zahlen zusammengesetzter sind.

Denken wir uns also gleich eine Summe von Ganzen, z. B. 964; setzen wir dazu etwa $\frac{135}{532}$, und fügen diesem Betrage noch mehrere aliquote Theile bei, z. B. $\frac{245}{387}$, so sieht man wohl, daß der letzte Bruch von allen vorhergehenden Zahlen, nämlich dem Ganzen und den aliquoten Theilen, genommen werden muß. Man sieht, daß man also zuerst $\frac{245}{387}$ von der Zahl 964, und eben so viel von den $\frac{245}{387}$ zu nehmen hat. Also:

964
135
4720
2892
964

532	300	40	$244\frac{232}{532}$
	246	62	
	34	4	
	33	3	
	2		

964
244
1208 $\frac{232}{532}$

Dieser letzten Summe sind noch die $\frac{245}{387}$ zu geben:

1208
245
6040
4832
2416

387	7959	6	0	$764\frac{282}{387}$
	890	+	2	
	752	2		
	789			
	26			
	73			
	2			

Eben so müssen die oben noch zurückgebliebenen $\frac{232}{532}$ behandelt werden:

232
245
1160
928
464
56840

Die letzte Summe ist $\frac{56840}{532}$; folglich:

532	568	4	0	$\frac{106448}{532}$
	36	6	8	387
	6	4		
	4			

Das Ganze wäre nun:

$$1208 + \frac{232}{532}$$
$$764 + \frac{292}{387}$$
$$1972$$

$$\frac{106448}{532}$$
$$387$$

Diese Brüche müssen nun wiederum zusammenadbirt werden: $292 + 106 = \frac{398}{387} = 1\frac{11}{387}$; das Ganze kommt zu den obigen $1972 = 1973$. Hierzu kommt noch $\frac{11\frac{448}{532}}{378} + \frac{232}{532}$. $\frac{1}{532}$stel eines 378stels ist $\frac{1}{378} = \frac{532}{585\frac{217}{378}}$. $\frac{11}{378} = 11 \times 532 = \frac{5852}{532}$; $\frac{5852}{378} = 378$ | 585 | 2 | $15\frac{178}{378}$. Nun waren aber

217	
02	
58	
2	
1	

oben noch $\frac{448}{532}$, das sind hinwiederum $\frac{448}{532}$; diesen müssen noch die $\frac{178}{532}$ beigefügt werden. 448 + 178 giebt 626;

$\frac{626}{378} = 378$ | 626 | $1\frac{248}{378}$; diese 1 zu 15, giebt

358
24

$\frac{16\frac{248}{378}}{532}$, und diese zu $\frac{232}{532} = \frac{248\frac{248}{378}}{532}$; das Ganze ist also $1973\frac{248\frac{248}{378}}{532}$; der aufgelösete Bruch aber ist 378×532 und 248×378, und dazu $248 = 250992\frac{2}{96}$.

Weil diese Uebungen etwas verwickelt sind, so giebt die Anwendung der obigen Normalregel eben eine treffliche Erleichterung bei der Proportionalrechnung. Gesetzt es wäre gegeben:

$$(964 + \tfrac{135}{532}) + \tfrac{245}{387} : 513383 = 4932 : x.$$

Hier ist $964 + \frac{135}{532}$ anzusehen als ein Ganzes, welches ich durch a bezeichnen will. Zu ihm soll noch $\frac{245}{387}$ kommen. Durch diese Angabe von Theilen ist das Ganze bestimmt, das nun in dieser Beziehung natürlich $\frac{387}{387}$ haben muß. Der Inbegriff der neu hinzugekommenen Theile ist aus dem Ganzen zu finden: $\frac{387}{387} + \frac{245}{387} = \frac{732}{387}$. Nun kann das Verhältniß des Ganzen a zu b bleiben, aber

es ist dann irgend einer Proportionalzahl $\frac{245}{7\,32}$ zu entziehen. Also: $a : b - \frac{245}{7\,32} = c : x$,
oder: $a : b = c - \frac{245}{7\,32} : x$,
oder: $a : b = c : x - \frac{245}{7\,32}$.

Wir wollen das Verhältniß nehmen:

$$a : b = c - \tfrac{245}{7\,32} : x.$$

Aufl. $964 + \frac{135}{532} = \frac{513383}{532}$; 513383 Ganze sind $532 \times \frac{513383}{532}$; $a = 4392 - \frac{245}{7\,32}$ ($\frac{1}{7\,32} \times 4392 = 6$); $\frac{245}{7\,32} = 245 \times 6 = 1470$. $4392 - 1470 = 2922$; $b = 532 \times a$; folglich $532 \times 2922 = 1554504$. Das ganze Verhältniß ist $(964 + \frac{135}{532}) + \frac{245}{387} : 513383 = 4392 : 1554504$.

Faßt man alles, was hier geschehen mußte, zusammen, so sieht man, daß zuerst die gegebene erste Proportionalzahl in eine gleichnamige verwandelt werden mußte. Nun sollten ihr eigentlich die $\frac{245}{387}$ beigesellt werden; aber da es nach dem Obigen durchaus einerlei ist, ob ein neu hinzugekommener Theil gleich der ersten Zahl gegeben, oder der Werth desselben einer der folgenden Proportionalzahlen genommen wird, so wurde diese Operation bis zur ersten Proportionalzahl des zweiten Gliedes aufbewahrt, und unterdeß gesehen, wie viel mal a in b enthalten war, eben so viel mal mußte nun x auch c enthalten. Um dieß zu finden, mußte, wie bei jeder Proportionalrechnung, der Quotient aus der Division a in b zu dem Multiplicator der c werden. Diese c erlitt aber die Veränderung, daß ihr nach der obigen Bedingung die $\frac{245}{387}$ genommen werden mußten, um das Verhältniß herzustellen, welches außer den neu hinzugekommenen $\frac{245}{387}$ Statt fand; nach diesem Abzuge mußte durch die Multiplication das richtige Product sich ergeben.

Versucht man dasselbe auf eine andere Weise, so wird sich nicht minder ein gleiches Product ergeben. Wir können diese Form nehmen:

$$a : b = c : x - \tfrac{245}{732}.$$

Dann wäre alles so wie vorher, nur mit dem Unterschiede, daß $c = 4392$ bliebe, und mit dem Exponenten 532 multiplicirt werden müßte. Also:

$$\begin{array}{r} 4392 \\ 532 \\ \hline 8784 \\ 13176 \\ 21960 \\ \hline 2336544 \end{array}$$

Dieß Product wäre die vierte Proportionalzahl. Aber ihr müssen noch die $\frac{245}{732}$ genommen werden:
$532 \times 4392 = 2336544 \qquad \frac{245}{732} = 782040;$
$2336544 - 782040 = 1554504.$

Wir wählen nur noch ein Beispiel, dem wir aber eine veränderte Proportionalzahl verleihen; es mag das Verhältniß seyn:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 964 + \frac{135}{532} + \frac{245}{387} : 782943 = 875319 : x. \end{array}$$

Umgesetzt:

$$a : b = c : x - \tfrac{245}{732}.$$

$$964 + \tfrac{135}{532} = \tfrac{513383}{532} \text{ *).}$$

Natürlich muß nun die 2te Proportionalzahl des ersten Gliedes entweder selbst in 532stel umgesetzt, und dann durch die erste dividirt, oder die erste kann sogleich in die 2te hineindividirt, und dann

*) Dieß findet man, wenn man die Ganzen durch den Nenner, der das Wieviel der aliquoten Theile anzeigt, multiplicirt, und dann den Zähler zum Producte addirt.

der Quotient 532 mal genommen werden, so hat man nicht minder den Exponenten. Wir thun das erstere:

$$532 \times 782943 = 416525676^{b}.$$

$b = 811\frac{172063}{513383} \times a$. Da a gleich ist der Summe c, oder 875319, so muß x seyn $811\frac{172063}{513383}$ mal $c = 709883709 + 293172\frac{492221}{513383}$, das ist $710176881\frac{492221}{513383} - \frac{245}{732} \times x = 237695813 + \frac{329578 + \frac{620}{732}}{513383}$, oder $\frac{241251770}{375796356}$. Das ganze Verhältniß: $964 + 135 + \frac{245}{387} : 782943$ gleich $875319 : 237695813\frac{241251770}{375796356}$.

Hier mag diese Art der Uebungen geschlossen seyn; alle andere Zahlencombinationen verweise ich in das Gebiet der angewandten Arithmetik, deren Behandlung Gegenstand des zweiten Bandes seyn soll.

C.

Verhältniß dieses arithmetischen Systems zu Pestalozzis Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse.

Der Zeitpunkt ist vorüber, wo man spöttelnd die Pestalozzische Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse die große Ausgabe des Ein mal Eins nannte. Die Erfahrung hat es gelehrt und wird es noch mehr lehren, daß die compendiösen Uebungen auch überall höchst compendiöse Bröckchen von Wahrheit und Fertigkeit zurücklassen. Man staunt über die Resultate, zu welchen diese Foliobehandlung der Arithmetik führt; man sollte vielmehr stauen, daß sie frappiren, daß man nicht längst schon an größere Resultate gewöhnt ist; sollte staunen, daß man überall so emsig gelehrt und so saumselig gelernt, so unendlich viel abgefragt und so blutwenig herausgebracht hat. — Das nil admirari sollte doch ja in der Beurtheilung solcher neuen Versuche vor allem andern zum recht unbefangenen Beobachten stimmen. Meine Erfahrungen reichen weit genug, um zu glauben, daß die hier neu erscheinende Behandlungsart der Arithmetik nicht bloß pädagogisch didaktisch, sondern auch objectiv für die Wissenschaft wichtig seyn wird. Wenn Kin-

der von 8 bis 10 Jahren, wie dieß bei meinen Zöglingen der Fall ist, alle Stufen der hier vorkommenden Uebungen vollkommen und mit der größten Klarheit durchgemacht haben, so ist dieß allerdings ungewöhnlich, aber deshalb nicht außerordentlich, sondern es liegt vielmehr in der Natur der Sache und wird überall gleiche Folgen haben, wo es auf gleiche Weise und mit gleichem Ernste behandelt wird.

Die Verschiedenheit meines Verfahrens von dem Pestalozzischen wird sich bald aus der ersten Ansicht offenbaren. Vor allem muß in die Augen springen, daß mein Buch einen ganz andern Zweck hat, als die Pestalozzische Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse. Denn die letztere giebt wörtlich von Schritt zu Schritt alle Uebungen, ohne dem Lehrer etwas selbst zu überlassen, ohne die Sache weiter zu erörtern. Dieß liegt auch ganz in Pestalozzis Plane. Er will, laut der Vorrede zum dritten Hefte, keine tiefere Untersuchungen geben, weil sie nicht ins Gebiet des sie einfach anwendenden Lehrers, noch viel weniger der sie einfach anwendenden Mutter gehören. Für diese beide, fährt er fort, das heißt bestimmt für diejenigen, um deren willen die Uebungen dieser Anschauungslehre geschrieben sind, kann nur das eigene zu einem hohen Grade von Fertigkeit betriebene Lernen und Lehren derselben, und die Erfahrung ihrer Wirkungen auf ihren Geist selbst sowohl, als auf den Geist derjenigen, die sie unterrichten, entscheiden. Diesen Zweck werden die Pestalozzischen Bücher ganz gewiß erreichen, sie werden den Zögling ganz bestimmt so weit bringen, als sie selbst führen, sie werden durch diesen Stufengang auch das Ihre beitragen, um die Vernunftanlage zur Vernunftkraft zu erheben, denn das muß eine jede naturgemäße Uebung in der Combination der Verhältnisse, es mögen diese Maß, Form oder Gewicht betreffen. Die innern Vermögen werden durch innere Operation, durch einen rein psychologischen Gang allein aufgeregt und entwickelt. Folgert man aber daraus, daß die Sache deswegen auch schon objectiv gefaßt, ihrem Zwecke gemäß behandelt sey, so ist dieses voreilig, denn es kann eine gemessene Anstrengung des Geistes, ein vollständiges systematisches Auffassen irgend eines Gegenstandes, eine Bestimmtheit und Klarheit vorhanden seyn, ohne gerade den speciellen Zweck des Objects zu berücksichtigen, denn dieß alles kann das letztere nicht geben, weil es ewig in dem Subjectiven liegt. Das Object ist nicht durch das Subject bedingt. Wenn eine Uebung den Bedürfnissen und Kräften des Geistes angemessen ist, so bleibt

immer noch zu untersuchen übrig, ob sie auch angemessen ist der Natur des Gegenstandes. Meines Bedünkens muß aber beides vereinigt werden.

Die hier erscheinende Schrift ist ein arithmetisches Lehrbuch und strebt nach den Vollkommenheiten eines Lehrbuchs, das allerdings Grundregeln geben und die Sache erörtern mußte, auch ohne Rücksicht auf den besondern pädagogischen Zweck. Deswegen schien es auch gerathen, die Methodenlehre sogleich mit dem ersten Theile zu verbinden. Auch hierin wird man nicht eine jede einzelne Uebung von Wort zu Wort angegeben, sondern nur von Stufe zu Stufe angedeutet finden Ich konnte daher in einen kürzern Raum allerdings mehr zusammendrängen, als es Pestalozzi vermöge seines Zweckes, einen vollständigen Stufengang durchzuführen, möglich war.

In Ansehung der Behandlung der Zahl wird man folgende Verschiedenheit bemerken:

Pestalozzis Elementarbücher stellen die Zahl als Folge empirischer Wahrnehmungen dar, während sie hier als Acte rein innerer Anschauung aufgefaßt werden. Ich will mich verständigen. In den Uebungen des ersten Heftes der Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse, welche die Einheitstabelle behandeln, ist überall von Zahlengröße die Rede, nicht von Zahlenordnung, und diesem gemäß ist die Verfahrungsart. In den ersten Uebungen des Lehrbuchs der arithmetischen Verhältnisse ist durchaus auf die Ordnung alles gebaut, nicht auf äußerlich wahrgenommene Größe. Wenn Pestalozzis Schüler die Tabelle sehen und die Zahlen summiren, so ordnen die Elementarschüler meiner Methode, wenn dort alle Namen der Zahlen von eins bis hundert Größenbezeichnungen sind, die 15 z. B. sich darstellt in dem 5ten Fache der dritten Reihe, wo die Dreien sich befinden, und in dem dritten Fache der 5ten Reihe, wo die arithmetischen Fortschreitungen mit fünf sind, so erscheinen sie im arithmetischen Lehrbuche als die unter einem zweiten Zig begriffenen Einheiten, als zusammengesetzt aus einer höheren und einer niederen Einheit. Die Zahlen von eins bis zehn werden Normen für Ordnung, für Rubriken, keinesweges für die äußere Darstellung der wahrgenommenen Vielheit, die nach meiner Ueberzeugung nur durch Ordnung in uns entsteht, und nur darauf sich stützt. Indem wir z. B. 85 aussprechen, so schwebt uns keinesweges jede Einheit vor, sondern vielmehr die Zahl der Zig und der Einer; noch auffallender ist dieß bei Hunderten und Tausenden der Fall, die nur in so fern für

uns

uns Sinn haben, als wir die Rubriken uns mit Klarheit vorstellen; der Einheiten sich bewußt zu werden, ist schlechterdings unmöglich. Diesem gemäß mußte nach meiner Ansicht die Zahl von vorn herein behandelt werden. Mehr noch offenbaret sich diese Verschiedenheit in der Behandlungsart der sogenannten Bruchtabelle; die Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse lehrt die Brüche als Folge der räumlichen Theilung auffassen, und verfährt der obigen Ansicht gemäß consequent. Das Lehrbuch der arithmetischen Verhältnisse weiß nichts von empirischen Theilungen des Raumes, kann auch durchaus nicht die Zahlenverhältnisse dadurch herausfinden, sondern es lehrt vielmehr den Raum nach den arithmetischen Verhältnissen theilen: denn was giebt uns die Gewährleistung für die Richtigkeit, daß ein kleinerer Raum aliquoter Theil eines größern sey? Das Auge fürwahr nicht, denn da müßte wenigstens bei einer jeden Operation der Maßstab zur Hand seyn, um die Vergleichung zu bewerkstelligen. Vielmehr ist es das Auffassen reiner Zahlverhältnisse, das uns in den Stand setzt, von Theilen zu sprechen, wo sich dieselben auch immer darstellen mögen. Halbe bestehen nur in so fern die Zahl 2 besteht, und Drittel nur in so fern das Verhältniß der Einer zur Drei da ist u. s. f. Mithin muß man auch darauf einzig und allein die abstracten Verhältnisse beziehen, und nicht dem Raume ablesen wollen, was nimmer ihm aufgedrückt werden kann, weil es ihm durchaus fremd ist. Das Empirische der Arithmetik ist in der Zeit allein zu suchen. Es ist also einzig und allein die Zahlenordnung, die sinnlich darstellbar ist, und einzig und allein die Ordnung, welche in den ersten Uebungen aufgefaßt werden muß, denn daraus entwickelt sich alles Uebrige. Die ganze spätere Uebung, die Auflösung der Probleme, muß sich dann ergeben aus der reinen Zahlconstruction.

Als Beispiel möge eine Auflösung aus dem dritten Hefte der Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse, und zwar eine von den letzten S. 284 hier stehen.

Frage: Das Verhältniß von 1 Ganzen und $\frac{3}{7}$ zu einer unbekannten Zahl ist gleich dem Verhältniß von 1 Ganzen und $\frac{3}{8}$ zu 1 Ganzen und $\frac{4}{7}$; welches ist diese unbekannte Zahl?

Auflösung: 1 Ganzes und $\frac{3}{8} = \frac{15}{8}$; 1 Ganzes und $\frac{4}{7} = \frac{11}{7}$; $\frac{1}{7}$ ist $\frac{8}{56}$ *); $\frac{1}{8} = \frac{7}{56}$; $\frac{1}{7}$ ist 8 mal der siebente

*) Hier tritt gleich ein Fall ein, wo das Verhältniß der Siebentel und Achtel nicht aus der concreten Zahl 7 und 8 selbst entwickelt ist, sondern aus der Eintheilung eines Raums in 7 und 8 Theile.

Theil von $\frac{1}{8}$. Das Verhältniß von $\frac{1}{8}$ zu 8 mal dem 7ten Theile von $\frac{1}{8}$ ist gleich dem Verhältnisse von 1 Ganzen und $\frac{3}{7}$ zu 8 × 7ten Theile von einem Ganzen und drey Siebentel. 1 Ganzes und drey Siebentel sind $\frac{10}{7}$, der siebente Theil von $\frac{10}{7}$ sind $\frac{10}{49}$; 8 mal $\frac{10}{49}$ sind $\frac{80}{49}$ und $\frac{80}{49}$ sind 1 Ganzes und $\frac{31}{49}$.

Das arithmetische Lehrbuch löset diese Aufgabe so: $1\frac{3}{8} : 1\frac{4}{7} = 1\frac{3}{7} : x$. $1\frac{3}{8} = \frac{11}{8}$; $1\frac{4}{7} = \frac{11}{7}$; $\frac{1}{7} = 1\frac{4}{7} \times \frac{10}{11}$. Da $\frac{11}{8} = \frac{10}{7}$, so sind $\frac{11}{7} = 1\frac{4}{7} \times \frac{10}{7}$; $\frac{4}{7} \times 10 = 1\frac{3}{7}$; $10 + 1\frac{3}{7} = \frac{11\frac{3}{7}}{7}$ oder $1\frac{4\frac{3}{7}}{7}$; $\frac{4}{7} = \frac{4 \times 7 = 28}{\frac{7}{7}}$; $\frac{28 + \frac{3}{7} = 31}{\frac{7}{7}}$ oder $\frac{31}{49}$; (vergl. §. 24 S. 163 f.)

Es ist dem Lehrbuche der arithmetischen Verhältnisse eigenthümlich, durchaus alles aus den Zahlen, die verglichen werden, selbst hervorzuholen und dann zu operiren. Es ist dem Schüler dieser Methode durchaus einerley, ob er $\frac{100}{7}$ mit $\frac{100}{8}$ oder $\frac{1}{7}$ mit $\frac{1}{8}$ zu vergleichen hat. Bei einer jeden concreten Zahl müssen sich ihm auch alle davon abstrahirte Verhältnisse darstellen. Er sucht daher auch eben so leicht das Verhältniß der 21stel mit 84steln als diejenigen von weniger zusammengesetzten Brüchen, weil ihm die Norm gegeben ist, nach welcher er operiren soll.

Das Lehrbuch der arithmetischen Verhältnisse lehrt also durchaus nur die reinen Zahlenverhältnisse auffassen. Die Pestalozzischen Schüler sind orientirt in den Tabellen und wissen diese vortreflich zu behandeln, auch fehlt ihnen die Abstraction nicht in so weit sie den Tabellen analog seyn kann. Wo aber dies nicht ist, kämpfen sie mit Schwierigkeiten. Wenn sie z. B. $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{2}\frac{3}{4}$ nehmen sollen, so machen sie Umwege, indem sie zuerst alles in Ganze auflösen, anstatt sich gleich an die concrete Zahl 13 zu halten. Wenn vollends doppelte und dreifache Verhältnisse vorkommen, so sind noch mehrere Schwierigkeiten zu bekämpfen.

Die verschiedene Ansicht der Zahl führte auch von selbst einen verschiedenen Gang in Ansehung der Behandlung herbei.

Die Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse gehet aus von dem Empirischen zum Auffassen reiner Größenverhältnisse. Es werden Einheiten aufgefaßt, und mit einander mannigfaltig verbunden; dann erscheinen ganz getrennt davon die Uebungen, welche die Ganzen und Theile mit einander in Verhältniß setzen, in den letzten Uebungen werden allerdings Verhältnisse combinirt, aber gestützt auf die äußerlich wahrgenommenen Raumverhältnisse. Das Lehrbuch der arithmetischen Verhältnisse hingegen geht

von dem Concreten zum Abstracten. Es faßt zunächst die Zahl auf, in so fern sie sich äußerlich darstellen und versinnlichen läßt. Nachdem diese Anordnung gemacht ist, so nimmt es diese als Regulativ zur weitern Behandlung, und in sofern die concrete Zahl nur Regulativ ist, in sofern ist dann die Zahlencombination abstract.

Die Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse behandelt in den ersten Uebungen die Einheitstabelle, und giebt eine weitere Umsicht der Zahlengröße; das Lehrbuch der arithmetischen Verhältnisse lehrt an der ersten Ordnung alle mögliche Verhältnisse kennen, und dadurch eine Norm bilden, nach welcher alle übrigen Zahlen behandelt werden. Es geht recht eigentlich von den Anschauungen zu Intuitionen.

Bey dem Gebrauch der Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse muß der Schüler lernen sehen, auffassen und behalten, wie bey einer jeden auschaulichen Erkenntniß. Bei dem Gebrauch des Lehrbuchs der arithmetischen Verhältnisse muß er lernen auffassen, und das aufgefaßte Concrete in Begriffe umsetzen. Kurz es war mir durchaus Zweck, unmittelbar auf den Verstand und auf die Vernunft zu wirken.

Diese Verschiedenheit des Ganges erfordert ebenfalls ein anderes Versinnlichungsmittel. Die Zahl hat nichts Räumliches, sie existirt nur in der Zeit, und auch da nicht als etwas absolutes, sondern vielmehr als etwas relatives. Es sollte ferner die Ordnung vornehmlich, nicht die Größe angeschaut werden. Beydes erfordert ein Versinnlichungsmittel welches veränderlich ist, und das sowohl die Ordnung selbst zu erzeugen und zu schaffen, als auch die Zeitverhältnisse zu veranschaulichen vermag. Beide Bedingungen können nur durch ein Versinnlichungsmittel erfüllt werden, welches beweglich ist, und ein solches ist oben beschrieben.

Man wird vielleicht fragen: Wo bleibt das System von Anschauungen, welches durch die Tabellen wirklich äußerlich dargestellt ist? Wäre die Arithmetik in den Tabellen erschöpfend dargestellt, und enthielte sie nichts weiter, oder gründete sie sich wesentlich darauf, so würde ich hierauf nichts erwiedern können, aber ich meine, daß dieß durchaus zu viel sey, indem alle arithmetischen Uebungen einzig auf sich selbst gegründet seyn sollen, ich meine daß ein jeder, der die concrete Zahl von eins bis zehn angeschaut hat, auch dadurch das ganze System in seiner Gewalt haben wird.

Noch manches würde sich hier mit einschalten lassen; aber es kann nicht geschehen ohne die Grenzen der Bescheiden-

heit zu überschreiten. Der prüfende Leser kann unbefangener urtheilen als der Verfasser, der nicht gegen sein Werk sprechen wird. Daß die Pestalozzische Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse nicht so weit reiche, als das Lehrbuch der arithmetischen Verhältnisse, kann ihr nicht zum Vorwurf gereichen, da sie einmal den Faden durchaus ganz ausspinnen wollte, und die weitere Anwendung noch folgen soll. Die Zeit wird es lehren, wie die folgenden Theile der Pestalozzischen Bücher die hier gegebenen Uebungen behandeln werden.

Pestalozzi kann übrigens nur dadurch geehrt werden, daß man seine Sache mit derjenigen Unbefangenheit prüft, mit der er sie selbst der Welt übergab. Es kann niemand ihn mehr verehren und höher achten als ich. Sein Feuer hat mich entflammt; ihm verdanke ich viel von dem was meinem praktischen Wirken gelungen. Aber er würde sich meiner Freundschaft schämen, und ich ihn herabsetzen, wenn ich zu seinen blinden Nachbetern gehören wollte. Ich habe es schon gesagt und sage es noch einmal: Pestalozzi hat in seinem Buche, wie Gertrud ihre Kinder lehrt, eine Ansicht der Zahl wenigstens angedeutet, der die Lehrbücher selbst noch nicht entsprechen. Ich arbeitete gleich nach der Erscheinung der Gertrud an der gegenwärtigen Schrift, die ich zunächst nur für meine Schüler bestimmte. Erst als ich sahe, daß die Anschauungslehre der Zahlverhältnisse nicht so ausfiel, als ich erwartete, entschloß ich mich zu einer öffentlichen Bekanntmachung meines Verfahrens.

Ich suche dabey nur die Wahrheit, und fordere einen jeden auf mit mir ein Gleiches zu thun. Wenn es mir gelungen, eigenes Prüfen geweckt und den Glauben befestigt zu haben, daß man nicht zu früh stehen bleiben darf und zu bald etwas für vollendet halten müsse, so sind meine Wünsche befriedigt. Freuen werde ich mich aber, wenn andere mit mir finden, daß durch diese Simplificirung die Wissenschaft einen neuen Zusatz von Bestimmtheit erhalten habe, und dadurch ein freierer Zutritt für jeden ausgewirkt worden sey.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite	5	Zeile	29	} streiche u. s. f.
—	—	—	32	
—	6	—	20	}
—	—	—	25	} fehlt u. s. w.
—	—	—	26	
—	—	—	27	
—	7	—	3	gehört das weiter unten stehende * hin.
—	—	—	9	fehlt 3 + 3 + 2.
—	—	—	12	— 3 + 3 + 3.
—	—	—	14	streiche das *.
—	—	—	19	fehlt 3 + 3 + 1 + 1.
—	8	—	13	— 1 + 1 + 2 + 2 + 3.
—	—	—	16	— 1 + 2 + 2 + 2 + 3.
—	—	—	20	statt Den, lies Denn.
—	10	—	13	fehlt 3 + 3 + 1.
—	12	—	20	— Antwort: 4 ist 4 weniger, als 8.
—	17	—	29	statt 20, lies 2.
—	22	—	2	— 7 — 3.
—	—	—	3	— + — =
—	31	—	11	— einen, lies einem.
—	39	—	6	— $\frac{2}{8}$, lies 2 mal 8.
—	40	—	5	— 1 — $\frac{1}{4}$.
—	42	—	4	— $\frac{3}{2}$ — $\frac{3}{4}$.
—	—	—	22	— × $\frac{5}{6}$, lies × $\frac{5}{6}$.
—	—	—	23	— $\frac{5}{6}$ = $\frac{25}{6}$, lies $\frac{4}{6}$ = $\frac{20}{6}$.
—	—	—	24	— 4 + $\frac{5}{6}$ — 3 + $\frac{3}{6}$.
—	—	—	25	— 9$\frac{5}{6}$, lies 8 + $\frac{5}{6}$.
—	43	—	5	— $\frac{7}{7}$, lies $\frac{3}{7}$.
—	—	—	6	— × — =
—	44	—	7	— 25 + $\frac{1}{2}$, lies 25.
—	46	—	3	— 1, lies 10.
—	48	—	6	— 3 + $\frac{10}{19}$, lies 10.
—	67	—	20	— 29, lies 30.
—	69	—	7	nach 60 lies weniger.

Seite 125 Zeile 16 statt das Ganze, lies 1 mal $\frac{5}{7}$.
— — — 22 — $\frac{1}{7}+\frac{3}{4}$, lies $\frac{1}{4}+\frac{3}{7}$.
— 126 — 1 — $\frac{3}{7}+\frac{3}{4}$ — $\frac{1}{4}+\frac{3}{7}$.
— — — 31 — $\frac{2}{7}$, lies $\frac{3}{7}$.
— — — 34 — $\frac{5}{7}$, lies $\frac{5}{7}-\frac{1}{22}$.
— 130 — 11 nach $\frac{6}{11}$ fehlt $\frac{1}{11}$.
— — — 18 nach $\frac{6}{11}$ fehlt $\frac{1}{11}$; in derselben Zeile statt $\frac{21}{28}$, setze $\frac{23}{28}$.
— 136 — 5 statt d. i. $\frac{1}{4}$, setze $\frac{3}{4}$.
— 140 — 4 v. u. statt 5 × 15, setze 6 × 15.
— — letzte Zeile, statt 100, setze 120.
— 151 Zeile 3 v. streiche 1 aus.
— 160 — 1 v. statt $\frac{20}{5}$, setze $\frac{20}{6}$.
— 184 u. f. steht einigemal unrichtig Potenz statt Summe.
— 281 Zeile 6 streiche das Komma.
— 286 — 12 setze nach ; so folgt daraus, daß.
— 292 letzte Zeile, statt ist, lies sind.
— 293 Zeile 28 nach ist; lies: so fehlerhaft und zeitraubend ist es, wenn man sie den Uebungen selbst vorausschickt.
— 296 — 5 nach 2 + 3 lies fünf.
— — — 6 — beiden, lies Einern.
— 297 — 32 — man, lies einen.
— — — 33 vor Dreier, lies einen.
— 312 — 10 statt 5, lies 6.

Für Jedermann.

G. C. Claudius

allgemeiner Briefsteller, ꝛc.

Vierte verbesserte Auflage

oder

Nützliche,

auf alle fast erdenkliche Fälle nach den Erfordernissen des gegenwärtigen Zeitalters eingerichtete

Briefe, ꝛc.

Zehnte verbesserte Auflage.

Mit einem Holzschnitte von Gubitz verschönert, 45¾ Bogen, roh 18 gr. sauber gebunden in Maroquin-Papier 1 Thlr.

In Parthien zu 12 und mehreren Exemplaren das Exemplar roh 12 gr.;

doch nur unmittelbar bey Unterzeichnetem.

Alle weitere Anpreisung ist überflüßig. Ein Buch, wie dieser Briefsteller, wird von Mund zu Mund empfohlen; denn diesem allgemeinen Beyfalle verdankt er das Glück, in nicht vollen 2 Jahren viermal gedruckt worden zu seyn. Nun hat aber auch derselbe seine höchste Vollkommenheit erreicht. Der Verfasser würde verkünsteln, wollte er ferner ändern. Prediger auf dem Lande haben die schönste Gelegenheit, in ihrem Wirkungskreise dieses nützliche Buch bekannter zu machen. Herr Prediger Ruben in Zaue bey Liberose, machte in seiner Diöces diesen Briefsteller bekannt, und es fanden sich 36 Liebhaber dazu. Eben so Herr Arnhold in Meißen und Mehrere. Nun kostete einem jeden das Buch nur 12 gr. also der Bogen circa 3 Pf. Etwas wohlfeileres läßt sich bey jetzigen Zeiten wohl nicht denken. Nimmt man noch den ökonomischen Druck dazu, so erstaunt man über den Gehalt dieses Buchs, bey einem so geringen Preise, noch mehr.

Heinrich Gräff.

An die gesammte Kaufmannschaft.

Auf die häufig erhaltenen Anfragen:

„Ob der

Rathgeber für Kaufleute u. s. w.

von Claudius

nicht noch um den Subscriptions-Preis zu bekommen sey, da durch das lange Warten von 1½ Jahren, viele an der wirklichen Erscheinung gezweifelt, mithin die Subscription aufgegeben hätten;“

dienet zur Nachricht: daß wenn ihrer 5 zusammen treten, und sich dann unmittelbar an mich wenden, ich Ihnen diese 5 Exemplare, statt daß sie im Ladenpreise 10 Thlr. kosten, für 6 Thlr. 16 Gr. überlassen will. Mehr kann ich nicht thun. 57½ Bogen (und wenn man bemerkt, wie viel Gehalt ein solcher Bogen hat) für 2 Thlr., ist gewiß schon äußerst billig, nun gar für 1 Thlr. 8 Gr. Inzwischen wenn dadurch jungen Leuten ohne Vermögen, die Anschaffung dieses nützlichen Buchs erleichtert werden kann, so wird ein guter Zweck mehr erreicht, und gerne biete ich hierzu die Hand. Ich muß aber durchaus darauf bestehen, daß nur bey 5 und mehreren Exempl. dieser Preis Statt findet. Ein einzelnes kostet 2 Thlr. Auf holländischartigem Schreibpapier sind noch Exempl. zu 2 Thlr. 12 Gr. zu haben.

Heinrich Gräff.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Tillich, Ernst,

Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik

Leipzig 1806

Math.p. 580
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082956-0